Załącznik nr 2

Autoreferat

1. Imię i nazwisko

Andrzej Wal

2. Posiadane dyplomy, stopnie naukowe/ artystyczne – z podaniem nazwy, miejsca i roku ich uzyskania oraz tytułu rozprawy doktorskiej

1988	Stopień magistra fizyki uzyskany na Wydziale Matematyczno-Fizycznym Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Rzeszowie. Praca magisterska „Wpływ czynników zewnętrznych na zjawisko selektywnego odbicia w ciekłych kryształach cholesterolowych"; promotor: dr hab. Henryk Konwent
1997	Stopień doktora nauk fizycznych w zakresie fizyki na Wydziale Fizyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. Tytuł rozprawy: „Krystalograficzne i magnetyczne symetrie cechowania w skończonym łańcuchu liniowym"; promotor: Prof. dr hab. Tadeusz Lulek; recenzenci: Prof. dr hab. Jacek Karwowski (Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu), Prof. dr hab. Wiesława Sikora (Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie)

3. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych/ artystycznych

1987	Asystent stażysta w Zakładzie Fizyki Półprzewodników Instytutu Fizyki na Wydziale Matematyczno-Fizycznym Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Rzeszowie (obecnie Uniwersytet Rzeszowski)
1988-1997	Asystent w Zakładzie Fizyki Półprzewodników Instytutu Fizyki na Wydziale Matematyczno-Fizycznym Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Rzeszowie (obecnie Uniwersytet Rzeszowski)
1997-2007	Adiunkt w Zakładzie Fizyki Półprzewodników (ZFP) Instytutu Fizyki na Wydziale Matematyczno-Przyrodniczym Uniwersytetu Rzeszowskiego
2007-2010	Starszy wykładowca w ZFP Instytutu Fizyki na Wydziale Matematyczno-Przyrodniczym Uniwersytetu Rzeszowskiego
2011-2013	Adiunkt w Zakładzie Fizyki Półprzewodników Instytutu Fizyki na Wydziale Matematyczno-Przyrodniczym Uniwersytetu Rzeszowskiego
Od 2013	Starszy wykładowca na Wydziale Matematyczno-Przyrodniczym Uniwersytetu Rzeszowskiego

4. Wskazanie osiągnięcia[1] wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.):

Jako osiągnięcie naukowe, zgodnie z powyższą ustawą, wskazuję jednotematyczny cykl ośmiu samodzielnych publikacji. Prace te podsumowują moje badania prowadzone od roku 2005 i jednocześnie stanowią spójną całość poświęconą opisowi własności elektronu na dwuwymiarowej sieci, z warunkami brzegowymi Borna-Karmana, poddanego działaniu skwantowanego pola magnetycznego.
Prace przedstawiam w porządku chronologicznym, podając pod każdą z nich impact factor czasopisma, zgodnie z rokiem, w którym została opublikowana oraz liczbę cytowań (wg bazy Web of Science).

a) tytuł osiągnięcia naukowego/artystycznego,

„Struktura pasm elektronów Blocha dla skończonych układów dwuwymiarowych w skwantowanym polu magnetycznym"

b) Publikacje wchodzące w skład osiągnięcia naukowego w kolejności chronologicznej (autor/autorzy, tytuł/tytuły publikacji, rok wydania, nazwa wydawnictwa),

H1. A. Wal, *Magnetic translation group for a finite system*, 2005, Physica Status Solidi (b), **242**, 291–295.
impact factor: 0.836; liczba cytowań: 2

H2. A. Wal, *Tight binding analogue of cyclotron orbits*, 2007, Physica Status Solidi (b), **244**, 2559–2563.
impact factor: 1.071; liczba cytowań: 1

H3. A. Wal, *The magnetic translation group for a finite system and the Born-Karman boundary condition*, 2008, Journal of Physics: Conference Series, **104**, 012021.
impact factor: brak ; liczba cytowań:2

---

[1] w przypadku, gdy osiągnięciem tym jest praca/ prace wspólne, należy przedstawić oświadczenia wszystkich jej współautorów, określające indywidualny wkład każdego z nich w jej powstanie.

H4. A. Wal, *The structure of magnetic translation group for a finite system*, 2009, Physica B-Condensed Matter, **404**, 1040–1044.
impact factor: 1.056 ; liczba cytowań: 3

H5. A. Wal, *Multielectron irreducible representations of the magnetic translation group*, 2009, Physica Status Solidi (b), **246**, 1024–1028.
impact factor: 1.150 ; liczba cytowań: 1

H6. A. Wal, *The symmetry of three-electron states in a quantized magnetic field*, 2011, Physica B: Condensed Matter, **406**, 2734–2739.
impact factor: 1.063; liczba cytowań: 1

H7. A. Wal, *Band structure, Brillouin zone, and condensation of states for an itinerant electron in a magnetic quantum dot*, 2013, Physica B: Condensed Matter, **410**, 222–226.
impact factor: 1.327; liczba cytowań: 1

H8. A. Wal, *Energy bands for finite two-dimensional systems in a quantised magnetic field: the symmetry of the model*, 2013, Journal of Mathematical Chemistry, **51**, 2285–2316.
impact factor:1.226; liczba cytowań: 0

c) omówienie celu naukowego/artystycznego ww. pracy/prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania.

Celem naukowym pracy było określenie własności elektronu na dwuwymiarowych, skończonych sieciach poddanych działaniu skwantowanego pola magnetycznego, w tym zmian powodowanych przez to pole w strukturze skończonych analogów pasm energetycznych, w strefie Brillouina takiego układu, jak również podanie liczb kwantowych charakteryzujących stany, w tym także stany wieloelektronowe, z wykorzystaniem symetrii i narzędzi teorii grup. Wymienione układy charakteryzują się niezwykle interesującymi własnościami fizycznymi, które sprawiają, iż są one od długiego czasu obiektem zainteresowań badaczy, zarówno doświadczalników jak i teoretyków. Zainteresowanie to wzrosło szczególnie po odkryciu całkowitego i ułamkowego kwantowego efektu Halla i próbach teoretycznego jego wyjaśnienia. Znamienną cechą takich układów jest zależność struktury pasmowej od bardzo nawet niewielkiej zmiany skwantowanego pola magnetycznego, objawiająca się tzw. „motylem

Hofstadtera"[2] na wykresie $E(\eta)$, gdzie η oznacza liczbę kwantów strumienia przypadających na komórkę elementarną sieci. Widmo ma charakter fraktalny, tzn. poziomy energii dla małych zmian strumienia odtwarzają strukturę, jaką można zobaczyć w większej skali. Dla niewymiernej liczby kwantów strumienia przypadających na komórkę dwuwymiarowej sieci widmo to staje się zbiorem Cantora. Efekty te związane są z kwantowaniem pola magnetycznego, a dokładniej mówiąc z niewspółmiernością liczby kwantów strumienia pola magnetycznego i wymiarów przestrzennych komórek elementarnych sieci dwuwymiarowej.

Pomimo długiego okresu badań nad takimi układami wciąż pojawiają się interesujące problemy w tym obszarze. Odnoszą się one do takich zagadnień teoretycznych jak: złożone fermiony (ang. „composite fermions")[3], grupy kwantowe i zastosowanie podstawienia Bethego do układów dwuwymiarowych[4], problemy kwantowania dla niskowymiarowych rozmaitości[5] oraz stosowanie warunków brzegowych do układów o skończonych wymiarach[6]. Nabierają one szczególnego znaczenia w ostatnich latach, kiedy możliwe jest osiąganie tak dużych strumieni pola magnetycznego przypadających na komórkę sieci, by obserwować fraktalny charakter widma. Stało się tak dzięki wprowadzeniu do badań sieci optycznych pozwalających symulować pole magnetyczne wystarczające do odnotowania rozważanych efektów[7]. W 2013 roku ukazała się praca donosząca o obserwacji fraktalnego widma dla supersieci Moiré'a powstałej z umieszczenia w odpowiedni sposób atomowej warstwy grafenu na heksagonalnym azotku boru (BN)[8].

Tematyka badań przedstawiona w cyklu samodzielnych prac związana jest przede wszystkim z wykorzystaniem symetrii do opisu cech omawianych modeli. W literaturze z tej dziedziny spotyka się głównie konstrukcję zwaną magnetyczną grupą translacji (ang. magnetic translation group — MTG), która zastępuje zwykłą grupę translacji w przypadku obecności skwantowanego pola magnetycznego. Została ona

---

[2] D. Hofstadter, Phys. Rev. B, **14**(6), 2239–2249 (1976).

[3] J. J Quinn, A. Wojs, K.-S. Yi, G. Simion, Phys. Rep., **481**(3-4), 29–81 (2009).

[4] P. B. Wiegmann, A. V. Zabrodin, Mod. Phys. Lett. B, **08**(05), 311–318. (1994); Y. Hatsugai, M. Kohmoto, Y.-S. Wu, Phys. Rev. B, **53**(15), 9697–9712 (1996).

[5] R. Alicki, J. Klauder, J. Lewandowski, Phys. Rev. A **48**, 2538–2548 (1993); K. Kowalski, J. Rembieliński, J. Phys. A. Math. Gen., **38**, 8247–8258 (2005).

[6] K. Czajka, A. Gorczyca, M. M. Maska, M. Mierzejewski, Phys. Rev. B, **74**, 125116 (2006).

[7] M. Aidelsburger, et. al., Phys. Rev. Lett. **107**, 255301 (2011); K. Jimenez-Garcia, et. al., Phys. Rev. Lett. **108**, 225303 (2012).

[8] C. R. Dean, et. al., Nature, **497**, 598, (2013).

wprowadzona przez Zaka i Browna w latach 60. ubiegłego wieku[9]. Grupa ta pozwala charakteryzować, poprzez swoje reprezentacje nieprzywiedlne, stany elektronu na dwuwymiarowej sieci krystalicznej z prostopadłym polem magnetycznym o skwantowanym strumieniu. Kwantowanie dobrane jest w taki sposób, że strumień przypadający na komórkę elementarną sieci jest dany ułamkiem $\eta = p/q$ w jednostkach kwantu strumienia h/e, gdzie p i q to liczby całkowite niemające wspólnego dzielnika. Takie podejście wymaga uwzględnienia relacji pomiędzy kwantowaniem pola magnetycznego, wymiarem skończonej sieci i stosowanymi warunkami brzegowymi. Pole magnetyczne wprowadzane jest do teorii opisującej omawiane zjawiska poprzez potencjał wektorowy, który z kolei może być zmieniany poprzez dobór odpowiedniego cechowania. Pomimo tego, że taki wybór nie zmienia parametrów energetycznych układu, może jednak mieć znaczenie przy uwzględnianiu wspomnianego efektu współmierności parametrów pola i warunków brzegowych.

Wykorzystując narzędzia teorii grup, w odniesieniu do opisanych wyżej układów, zbadałem zagadnienia do tej pory rzadko analizowane w literaturze z omawianego obszaru. Wśród najważniejszych wymienić należy: zależność struktury MTG od wybranego cechowania pola magnetycznego oraz od zastosowanych warunków brzegowych, wyznaczenie relacji równoważności w zbiorze reprezentacji nieprzywiedlnych MTG, a tym samym liczb kwantowych określających pasma energetyczne skończonych kryształów, w tym wyznaczających strefę Brillouina w polu magnetycznym, oraz przedstawienie sposobu wyznaczania tzw. „reprezentacji niefizycznych", wraz z zaproponowaniem ich interpretacji dla układów wieloelektronowych.

W moich badaniach ograniczyłem się głównie do układów o skończonych wymiarach. Do takich obiektów stosowałem periodyczne warunki brzegowe Borna-Karmana, ponieważ interesowało mnie opisanie własności energetycznych w funkcji kwazipędów, tak jak to zwykle przedstawiane jest w fizyce ciała stałego. Istnieje co prawda alternatywne podejście związane z wykorzystaniem tzw. sfery Haldane'a, gdzie głównym parametrem jest moment pędu, jednakże zastosowany przeze mnie sposób opisu symetrii za pomocą magnetycznej grupy translacji, zdeterminował wybór wspomnianych warunków brzegowych.

Początkowo badania dotyczyły relacji współmierności pomiędzy polem magnetycznym, zadanym poprzez potencjał wektorowy oraz parametr $\eta = p/q$ określający kwantowanie, a wymiarami przestrzennymi skończonego układu. Dla ich

[9] J. Zak, Phys. Rev. **134**, A1602–A1606 i A1607–A1611, (1964); E. Brown, Phys. Rev. **133**, A1038–A1044, (1964).

opisania wykorzystałem własności magnetycznej grupy translacji oraz jej reprezentacji nieprzywiedlnych. Te ostatnie zostały wyznaczone metodą indukcji, co pozwoliło na komputerową implementację algorytmu umożliwiającego uzyskanie reprezentacji dla żądanych parametrów układu. Jednym z głównych wniosków tej części badań było wykazanie, że warunki brzegowe dla skończonych układów mają wpływ na rodzaj stosowanego potencjału wektorowego, kompatybilnego ze względu na relacje współmierności. Rozważyłem dwa najczęściej używane cechowania: Landaua i symetryczne.

Z zagadnieniem współmierności wiąże się także relacja pomiędzy wybranym cechowaniem a strukturą magnetycznej grupy translacji. Rozważając wspomniane wyżej dwa cechowania pokazałem, jak szczegółowe własności struktury od nich zależą. Ten etap badań pozwolił także na wyrażenie elementów grupy poprzez odpowiednie generatory.

W literaturze poświęconej omawianym zagadnieniom pojawia się pojęcie „magnetyczna strefa Brillouina"[10], które odzwierciedla zmianę, jakiej podlega strefa Brillouina dwuwymiarowego kryształu po włączeniu skwantowanego pola magnetycznego. Najczęściej zmianę tę opisuje się jako zmniejszenie ilości dostępnych kwazipędów, w jednym z wybranych kierunków w sieci odwrotnej. Dokładna analiza reprezentacji nieprzywiedlnych określających „nierównoważne" kwazipędy pozwoliła na zdefiniowanie „magnetycznej pasmowej strefy Brillouina", jako zbioru wektorów $\boldsymbol{k}$ nad którymi zdefiniowane są skończone analogony pasm energetycznych dla takich układów.

Zak w swojej pracy wprowadzającej MTG zdefiniował wybrane reprezentacje tej grupy jako „fizyczne", tj. mające znaczenie przy opisie stanów jednoelektronowych. Określone są one poprzez wybranie konkretnej wartości parametru charakteryzującego nieprzywiedlne reprezentacje grupy, dokładniej mówiąc reprezentacje grupy cechowania, będącej podgrupą MTG. Pozostałe wartości tego parametru określane są jako niefizyczne. Florek [11] w swoich pracach zaproponował, iż reprezentacje odpowiadające tym parametrom mają zastosowanie w przypadku układów wieloelektronowych. Rozszerzyłem to podejście na układ identycznych elektronów uwzględniając w opisie zarówno grupę symetryczną (nierozróżnialność cząstek) jak i oddziaływanie typu Hubbarda między elektronami.

Cykl prac rozpoczyna prezentacja metod wyznaczania magnetycznej grupy translacji oraz jej reprezentacji dla przypadku sieci skończonych, a kolejne prace

---

[10] M. Kohmoto, Ann. Phys. (N. Y), **160**, 343–354 (1985).

[11] W. Florek, Phys. Rev. B, **55**, 1449–1453, (1997); J. Math. Phys. **42**, 5177, (2001).

omawiają własności takich układów w skwantowanym polu magnetycznym. Poniżej przedstawiam najważniejsze uzyskane wyniki:

1. Określenie struktury magnetycznej grupy translacji dla wybranych cechowań pola magnetycznego (Landaua i symetryczne). Elementy grupy translacji można przedstawić w postaci $(\boldsymbol{t}, \gamma)$, gdzie $\boldsymbol{t}$ oznacza translację, a γ jest stowarzyszoną z nią fazą (efekt pola magnetycznego). Obliczenia wykazują, że zbiór faz związanych z translacjami jest zależny nie tylko od wybranego cechowania i od parametru $\eta = p/q$, ale także od własności arytmetycznych składowych wektora $\boldsymbol{t}$. Zależność ostatnią obserwujemy jednak tylko dla cechowania symetrycznego. Pokazano także, że dla tego cechowania rząd grupy magnetycznych translacji nie zależy do parzystości liczby p, choć jej własności parzystości mają wpływ na szczegółową strukturę grupy.
2. Ustalenie relacji pomiędzy parametrami skwantowanego pola magnetycznego, warunkami brzegowymi Borna-Karmana oraz wybranym cechowaniem pola magnetycznego. Analiza tego typu zależności pokazała, że dla cechowania symetrycznego, aby zachować okresowe warunki brzegowe, konieczne jest ograniczenie dopuszczalnych wartości kwantowania pola magnetycznego do takich, dla których liczba p ma wartości parzyste. Dla cechowania Landaua nie obserwuje się tego typu zależności, tj. dopuszczalne są wszystkie wartości kwantowania pola w postaci $\eta = \frac{p}{L}$, gdzie $p = 1, 2, 3, \dots L$, a L jest wymiarem sieci wzdłuż wybranego kierunku. Głównym wnioskiem tej części badań jest określenie wpływu wybranego cechowania na dopuszczalne, przy stosowaniu periodycznych warunkach brzegowych, kwantowanie pola magnetycznego.
3. Interpretacja tzw. „niefizycznych" reprezentacji nieprzywiedlnych $\Gamma^{\kappa_x \kappa_y s}$ magnetycznej grupy translacji. W literaturze dotyczącej omawianych zagadnień zazwyczaj używa się reprezentacji nieprzywiedlnych zwanych „fizycznymi", tj. określonymi poprzez wybranie parametru $s = 1$. Liczba s numeruje reprezentacje podgrupy MTG związanej z czynnikiem fazowym γ, tj. grupy cechowania. W pracach pokazano, w jaki sposób wyznaczać reprezentacje dla wyższych wartości s oraz podano ich interpretację fizyczną. Takie właśnie reprezentacje mogą być wykorzystane do charakteryzowania stanów układów wieloelektronowych. Przy tym opisie uwzględniono również grupę symetryczną i unitarną, które zostały wprowadzone z powodu nierozróżnialności cząstek zgodnie ze schematem dwoistości Weyla[12]. W rozważanym modelu naturalnym

[12] H. Weyl, *The theory of groups and quantum mechanics*, New York: Dover Publications (1984).

jest rozszerzenie rozważań o oddziaływanie odpychające (model Hubbarda) pomiędzy elektronami.

4. Wprowadzenie parametrów opisujących strukturę pasm w polu magnetycznym. Reprezentacje nieprzywiedlne Γ magnetycznej grupy translacji poprzez swoje parametry (kwazipędy) κ_x, κ_y numerują stany pasma. Wartości tych kwazipędów tworzą magnetyczną strefę Brillouina (ang. magnetic Brillouin zone - MBZ). Liczba kwantowa γ' numerująca podpasma, na jakie rozszczepia się pojedyncze niezdegenerowane pasmo w polu magnetycznym, związana jest z wielowymiarowością reprezentacji $\Gamma^{\kappa_x,\kappa_y,s}$. Dla pola magnetycznego określonego przez $\eta = p/q$ wymiar reprezentacji nieprzywiedlnej wynosi $\gamma' = q$. Wprowadza się jeszcze jeden parametr, γ, określający stopień degeneracji każdego podpasma, a odnoszący się do krotności reprezentacji Γ w rozkładzie reprezentacji przywiedlnej MTG, określonej w przestrzeni położeń układu. W ostatecznym efekcie, pojedyncze niezdegenerowane pasmo dla skończonego kryształu bez pola magnetycznego rozpada się w skwantowanym polu na q podpasm, z których każde jest q-krotnie zwyrodniałe. Dodatkowa liczba kwantowa s związana jest z reprezentacjami podgrupy cechowania magnetycznej grupy translacji, a jej wartość określa liczbę elektronów w opisywanym układzie.

Pole magnetyczne zmienia symetrię translacyjną układu wprowadzając nieabelowość elementów grupy symetrii. Taka nieabelowość prowadzi w istocie do podniesienia symetrii, które przejawia się w tym, iż reprezentacje nieprzywiedlne MTG są wielowymiarowe. Kontrastuje to z jednowymiarowymi stanami Blocha, jako reprezentacjami abelowej grupy translacji. Symetria nowej struktury opisana jest przez komórkę magnetyczną, która jest q-krotnie większa od komórki krystalograficznej. Magnetyczna strefa Brillouina jest natomiast, odpowiednio, q-krotnie rozrzedzona, tj. posiada mniejszy zestaw dopuszczalnych kwazipędów w wybranym kierunku, np. y. W pracach pokazano, że rozrzedzenie to należy uzupełnić komplementarnym uszczupleniem kwazipędów w kierunku prostopadłym do wspomnianego. Wynika to z relacji równoważności w zbiorze reprezentacji nieprzywiedlnych. W obrazie pasm zdefiniowanych nad tak zredukowaną strefą, nazywaną magnetyczną pasmową strefą Brillouina (ag. magnetic band Brillouin zone - MBBZ), obserwujemy zatem „kondensację" stanów nad dopuszczalnymi przez symetrię kwazipędami. Takie zwyrodnienie, połączone z rozrzedzeniem strefy, to analogon zlewania się w polu magnetycznym poziomów swobodnych elektronów w poziomy Landaua.

5. Opis metody indukcji reprezentacji nieprzywiedlnych magnetycznej grupy translacji dla układów wieloelektronowych. Liczba elektronów związana jest

z parametrem s reprezentacji nieprzywiedlnej $\Gamma^{\kappa_x,\kappa_y,s}$. Pokazano, że wyznaczanie takich reprezentacji dla $s > 1$ jest szczególnie proste w przypadku, gdy parametr ten nie ma wspólnego dzielnika z parametrem q, określającym pole magnetyczne (strumień pola jest zadany przez $\eta = p/q$).

6. Podanie macierzy przejścia pomiędzy bazami: położeniową, pędową oraz dopasowaną do symetrii permutacyjnej. Pozwalają one na pełną charakterystykę stanów na wzór algebry Racah teorii momentu pędu przeniesionej na skończone kryształy. Dotyczy to zarówno stanów jedno- jak i wieloelektronowych, przy czym w tych ostatnich liczby kwantowe odnoszą się do wartości dotyczących całego układu s elektronów. Dla wyznaczenia macierzy przejścia wykorzystano operatory rzutowania zbudowane z użyciem reprezentacji nieprzywiedlnych magnetycznej grupy translacji i grupy symetrycznej Σ_s.

Znajomość widma energii dla układów nano- i mezoskopowych jest szczególnie istotna obecnie, ze względu na techniczne możliwości wytwarzania takich struktur. Metody zaprezentowane w cyklu publikacji mogą być wykorzystane do opisu tych układów w polu magnetycznym. Szczególnie interesujące, w tym kontekście, może być określenie fizycznie poprawnych i matematycznie rozwiązywalnych warunków brzegowych stosowanych w przypadku skończonych sieci. Równie ciekawe i pouczające jest badanie zmian powodowanych w strukturze pasm przez skwantowane pole magnetyczne i skończoność sieci krystalicznej. Zgromadzona w efekcie takich badań wiedza może pozwolić na projektowanie układów o zadanym widmie energii[13].

Wyniki badań zawartych w pracach H1-H8

H1. A. Wal, *Magnetic translation group for a finite system*, 2005, Physica Status Solidi (b), **242**, 291–295.

W pracy posłużono się modelem elektronu wędrującego, przy czym oddziaływanie ograniczone zostało do najbliższych sąsiadów. Dynamika układu opisana została przez hamiltonian ciasnego wiązania, a skończony kryształ został domknięty warunkami brzegowymi Borna-Karmana. Zastosowano najprostszy model z izotropową całką przeskoku i z polem magnetycznym wprowadzonym poprzez fazę $\vartheta_{\lambda\mu}$ zdefiniowaną dla każdej krawędzi (λ, μ) komórki kryształu, gdzie λ i μ oznaczają jego węzły. Kluczowym parametrem modelu jest ułamek $\eta = p/q$ reprezentujący strumień pola magnetycznego

[13] J. Zak, J. Phys. Conf. Ser. **104**, 012013 (2008).

przechodzący przez komórkę elementarną i wyrażony w jednostkach kwantu strumienia h/e. Zastosowano cechowanie symetryczne pola magnetycznego.

Symetrię takiego modelu opisuje magnetyczna grupa translacji. Przedstawiono i scharakteryzowano tę grupę dla dwuwymiarowego skończonego kryształu (na przykładzie o rozmiarze przestrzennym $L_x \times L_y = 4 \times 4$ i z parametrem $\eta = 1/2$, gdzie wymiary wyrażono w jednostkach wielkości komórki elementarnej). Opisano również metodę otrzymywania reprezentacji nieprzywiedlnych MTG poprzez indukcję z maksymalnej podgrup[14]. Podgrupa ta wybierana jest poprzez wskazanie magnetycznej komórki elementarnej, tj. komórki dla której sumowanie faz wzdłuż krawędzi daje wartość będącą liczbą całkowitą. Oznacza to, że strumień pola magnetycznego przenikający wybraną w ten sposób komórkę jest całkowitą wielokrotnością kwantu strumienia. Tak zdefiniowana podgrupa jest abelowa, co ułatwia znalezienie jej reprezentacji nieprzywiedlnych.

Procedura indukcji okazała się efektywna i łatwa do zamiany na algorytm komputerowy, który został zaimplementowany w języku pakietu Maple i wykorzystany w dalszych obliczeniach wykonanych na potrzeby kolejnych prac z tej tematyki.

Otrzymane indeksy reprezentacji nieprzywiedlnych charakteryzują stany elektronu w polu magnetycznym i polu periodycznego potencjału. W kontekście następnych prac koniecznym wydaje się podkreślenie, że w obliczeniach zastosowano periodyczne warunki brzegowe. Jak się bowiem okaże mają one znaczenie dla określenia tzw. warunków współmierności, tj. relacji pomiędzy rozmiarem kryształu, wartością pola magnetycznego i użytym cechowaniem pola magnetycznego.

H2. A. Wal, *Tight binding analogue of cyclotron orbits*, 2007, Physica Status Solidi (b) **244**, 2559–2563.

W pracy rozważano analog orbity cyklotronowej dla elektronów Blocha w polu magnetycznym, jak również wzajemne relacje pomiędzy warunkami brzegowymi a kwantowaniem pola magnetycznego. Przyjęto warunki brzegowe Borna-Karmana. Wprowadzają one kwazipęd, liczbę kwantową powszechnie używaną w opisie pasm energetycznych kryształów. Oddziaływania elektronów z polem magnetycznym i periodycznym potencjałem opisuje model ciasnego wiązania, wyrażony poprzez tzw. hamiltonian przeskoku. Struktura energetyczna jest w tym modelu bardzo czuła na wartość η i prowadzi do zależności typu motyl Hofstadtera.

Wybrano symetryczne cechowanie pola magnetycznego. Warunki brzegowe wprowadzają relację równoważności pomiędzy odpowiednimi elementami

[14] J. Mozrzymas, *Zastosowania teorii grup w fizyce*, PWN Warszawa, Wrocław (1977).

magnetycznej grupy translacji, co prowadzi jednocześnie do nałożenia ograniczeń na dopuszczalne, w ramach stosowanego modelu, kwantowanie pola magnetycznego. Otrzymujemy wówczas zależność opisującą kwantowanie pola w postaci $\eta = r/L$, gdzie L jest periodem kryształu dwuwymiarowego, a r liczbą całkowitą parzystą.

Wybrany hamiltonian modelu powinien komutować z operacjami magnetycznej grupy translacji, w szczególności z takimi, które definiują translacje o wektory prymitywne sieci. Warunek ten prowadzi do otrzymania dystrybucji faz zależnych od wybranego cechowania i zdefiniowanych dla każdej krawędzi komórki elementarnej. W pracy pokazano taki rozkład faz dla modelu skończonego kryształu. Powinien być on zgodny z przyjętymi warunkami brzegowymi, co nakłada ograniczenie na dopuszczalne wartości ułamka η. Jego licznik powinien należeć do zbioru parzystych liczb całkowitych z przedziału $r \in \{0, L^*\}$, gdzie L^* jest liczbą parzystą mniejszą od L.

Wprowadzone w pracy operatory *T(a)* i *T(b)* opisują działanie magnetycznej grupy translacji w przestrzeni stanów kwantowych elektronu. Są to unitarne niekomutujące operatory, których nie można jednocześnie zdiagonalizować. Baza stanów może być jednak zdefiniowana w taki sposób, że jeden z nich, np. *T(b)* będzie miał postać diagonalną. Wtedy drugi, *T(a)*, nie może być w pełni zdiagonalizowany i każda nieredukowalna podprzestrzeń jest analogiem orbity cyklotronowej definiowanej dla elektronów swobodnych. Operator *T(a)* działa na takiej podprzestrzeni w sposób cykliczny, co potwierdza wspomnianą wyżej analogię.

H3. A. Wal, *The magnetic translation group for a finite system and the Born-Karman boundary condition*, 2008, Journal of Physics: Conference Series, **104**, 012021.
W pracy rozszerzono dyskusję, wspomnianych w pracy H2, wzajemnych relacji pomiędzy warunkami brzegowymi Borna Karmana, a wybranymi cechowaniami pola magnetycznego, tj. cechowaniem Landau i cechowaniem symetrycznym. Jej głównym celem było porównanie przydatności obu wymienionych cechowań do opisu skończonych układów z zastosowanymi periodycznymi warunkami brzegowymi.

Elementy grupy MTG zapisane być mogą jako $(\boldsymbol{t}, \gamma)$, gdzie t oznacza translację należącą do grupy translacji T skończonego kryształu, a γ związana jest z fazą wprowadzoną przez pole magnetyczne. Część fazowa, a więc i postać mnożenia grupowego zależy od przyjętego cechowania pola magnetycznego. Periodyczne warunki brzegowe wprowadzają relacje równoważności pomiędzy elementami grupy, których translacje różnią się o period kryształu N (wymiar kryształu skończonego w jednostkach komórki elementarnej). Relacje te w połączeniu z prawem mnożenia grupowego określają kryteria, jakie powinno spełniać skwantowane pole magnetyczne, tj. nakładają warunki na dopuszczalne wartości parametru η. Dla cechowania Landaua parametr ten powinien być postaci $\eta = n/N$, gdzie $n = 0, 1, \dots N-1$. Dla cechowania symetrycznego natomiast licznik ułamka η powinien być liczbą parzystą z przedziału $(0, N-1)$. Kwantowanie strumienia w rozważanym modelu zależy zatem od wybranego cechowania. Z dwu przedstawionych cechowań bardziej dopasowane do symetrii układu jest cechowanie Landaua. Dla niego bowiem zbiór dozwolonych wartości η jest dwukrotnie większy niż w przypadku cechowania symetrycznego. Prowadzi to do wniosku, że dla małych układów wzajemne relacje pomiędzy rozmiarami sieci, warunkami brzegowymi i wybranym do opisu pola magnetycznego cechowaniem są istotne i powinny być brane pod uwagę przy opisie takich układów.

H4. A. Wal, *The structure of magnetic translation group for a finite system*, 2009, Physica B-Condensed Matter, **404**, 1040–1044.
Głównym celem pracy było określenie struktury magnetycznej grupy translacji oraz zbadanie na ile zależy ona od przyjętego cechowania pola magnetycznego. Wpływ potencjału pola na własności rozważanego modelu był już obserwowany we wcześniejszych pracach cyklu, gdzie stwierdzono wzajemną zależność pomiędzy rozmiarami płaskiej sieci, kwantowaniem pola i przyjętym cechowaniem. Tym razem nacisk położono na zbadanie zależności struktury grupy od wybranego potencjału pola magnetycznego. Do badań wybrano model sieci prostokątnej o skończonym rozmiarze, a pole magnetycznym zadane zostało przez parametr $\eta = p/q$, gdzie p i q to liczby całkowite niemające wspólnych dzielników.

Elementy magnetycznej grupy translacji składają się z translacji $\boldsymbol{t}$ i stowarzyszonej z nimi fazy, oznaczonej w pracy przez γ. Faza określona jest przez wybrane cechowanie i kwantowanie pola magnetycznego. Własności tak określonych elementów zbadane zostały dla cechowania symetrycznego i Landaua.

Dla cechowania symetrycznego czynnik fazowy zależy od pola magnetycznego zgodnie ze wzorem $\gamma = \exp(2\pi i \frac{1}{2}\frac{p}{q}\theta)$, gdzie $\theta \in \{0, 1, \dots q\}$ dla parzystych wartości p oraz $\theta \in \{0, 1, \dots 2q\}$ dla nieparzystych wartości p[15]. Wydaje się więc, że rząd MTG, będący iloczynem rzędu grupy translacji T i grupy związanej z czynnikiem fazowym (grupy cechowania), określony będzie przez parzystość liczby p. Dokładna analiza pokazuje jednak, że takie założenie nie jest prawdziwe. Przy wyprowadzeniu zależności pomiędzy translacją $\boldsymbol{t}$, a odpowiadającą jej fazą γ, z którą wspólnie tworzą element MTG, posłużono się prawem mnożenia grupowego. Gromadzeniu fazy podczas ruchu elektronu odpowiada w tym podejściu mnożenie elementów grupy wyrażonych poprzez

[15] W. Opechowski, W. Tam, Physica **42**, 529–556 (1969).

generatory. Rozważania pozwoliły określić, że rząd grupy nie zależy od parzystości p i wynosi $|T|q$, gdzie $|T|$ oznacza rząd grupy translacji. Należy jednak podkreślić, iż szczegóły struktury MTG wykazują zależność od parzystości tej liczby. Dla parzystej jej wartości z każdą translacją stowarzyszony jest taki sam zbiór faz, podczas gdy dla nieparzystego p liczebność zbioru dla każdej translacji jest co prawda taka sama, ale zbiór wartości przypisany różnym translacjom może być różny i wykazuje zależność od składowych (t_x, t_y) wektora $\boldsymbol{t}$.

Podobne obliczenia wykonano dla cechowania Landaua. Okazało się, że rząd grupy jest taki sam, co oczywiście stanowi oczekiwany wynik dla grup izomorficznych reprezentujących tę samą abstrakcyjną grupę. Tym razem jednak zbiór faz przypisanych do każdej translacji pozostaje taki sam, niezależnie od parzystości p.

Dla obu rozważanych cechowań dowolny element grupy został wyrażony poprzez dwa wprowadzone w pracy generatory. Podano również własności klas elementów sprzężonych oraz maksymalnej podgrupy abelowej. Obie te struktury mają podstawowe znaczenie dla wyznaczania reprezentacji nieprzywiedlnych MTG. Wyniki uzyskane w pracy będą więc stanowiły podstawę dalszych badań poświęconych pasmom energetycznym w polu magnetycznym.

H5. A. Wal, *Multielectron irreducible representations of the magnetic translation group*, 2009, Physica Status Solidi (B), **246**, 1024–1028.

W pracy przedstawiono procedurę wyznaczania reprezentacji nieprzywiedlnych $\Gamma^{\kappa_x,\kappa_y,s}$ magnetycznej grupy translacji zarówno dla parametru $s = 1$ jak i dla przypadku $s > 1$. Procedura oparta jest na metodzie indukcji z maksymalnej podgrupy abelowej. Zwykle w literaturze dyskutuje się przypadki tzw. reprezentacji „fizycznych" z wartością $s = 1$, których używa się do charakteryzowania stanów jednoelektronowych. Reprezentacje nieprzywiedlne dla pozostałych wartości tego parametru określane bywają jako „niefizyczne". W swoich pracach Florek uzasadnia, wykorzystując iloczyn reprezentacji nieprzywiedlnych Γ, że reprezentacje z parametrem $s = 2$ znajdują zastosowanie do opisu stanów dwuelektronowych[16]. W niniejszej pracy pokazano, że reprezentacje przywiedlne, które można otrzymać poprzez odpowiedni iloczyn tensorowy reprezentacji jednoelektronowych, rozkładają się na reprezentacje nieprzywiedlne MTG z parametrem $s = 2$. Oznacza to, że parametr ten związany jest z liczbą elektronów w układzie. W tym sensie, reprezentacje te mają odniesienie do układów

[16] W. Florek, Phys. Rev. B **55**, 1449–1453 (1997), W. Florek, J. Phys. Condens. Matter **11**, 2523–2529 (1999).

wieloelektronowych. W rozkładzie wydzielono część symetryczną i antysymetryczną, ponieważ zgodnie z zakazem Pauliego stan własny powinien być antysymetryczny. Pozwoliło to na uwzględnienie w modelu spinu elektronu.

Procedura indukcji reprezentacji nieprzywiedlnych jest szczególnie prosta dla przypadku $s = 1$, ale można ja efektywnie rozszerzyć dla większych wartości tego parametru. W pracy pokazano, iż schemat indukcji pozostaje taki sam dla tych wartości s, które nie mają wspólnych dzielników z q, wielkością charakteryzującą pole magnetyczne poprzez parametr $\eta = p/q$. Metoda została zilustrowana na skończonym układzie z polem skwantowanym zgodnie z parametrem $\eta = 1/3$.

H6. A. Wal, *The symmetry of three-electron states in a quantized magnetic field*, 2011, Physica B: Condensed Matter, **406**, 2734–2739.

Głównym celem pracy było przedstawienie kinematyki stanów wieloelektronowych dla modelu płaskiej sieci kwadratowej umieszczonej w skwantowanym polu magnetycznym. Stany wieloelektronowe przedstawiono z wykorzystaniem iloczynu tensorowego stanów jednoelektronowych, a podstawowym narzędziem je klasyfikującym była symetria. Dla uzyskania pełnego opisu wprowadzono spin elektronu, co spowodowało, że w modelu wykorzystano obok symetrii translacyjnej także symetrię permutacyjną i unitarną. Symetrie te zadano poprzez odpowiednie grupy: magnetyczną grupę translacji, grupę symetryczną (permutującą elektrony) i grupę unitarną (permutującą stany elektronowe). Włączenie tych symetrii do opisu układu pozwala na wydzielenie części „orbitalnej" (przestrzennej) i spinowej w odpowiednich iloczynach tensorowych reprezentujących stany wieloelektronowe. Taki sposób umożliwia ograniczenie dyskusji tylko do części „orbitalnej", ponieważ jej symetria określa podprzestrzeń spinową, z którą się ona łączy, by zapewnić antysymetryczność pełnej funkcji falowej elektronów.

Reprezentacje nieprzywiedlne wprowadzonych grup wykorzystano do zdefiniowania baz dopasowanych do symetrii rozpatrywanego układu, zgodnie z ogólnym schematem dwoistości Weyla. Reprezentacje grupy permutacyjnej Δ^{λ} i unitarnej D^{λ} charakteryzowane są przez partycje λ liczby elektronów n (tj. poprzez możliwe rozkłady liczby n na sumę liczb całkowitych). Reprezentacje magnetycznej grupy translacji $\Gamma^{\kappa_x,\kappa_y,s}$ są z kolei zadane przez kwazipędy κ_x, κ_y (takie oznaczenie wprowadzono dla odróżnienia tych wielkości od kwazipędów $(k_x, k_y) = (2\pi\kappa_x, 2\pi\kappa_y)$) oraz parametr s. Ta ostatnia liczba związany jest z jednej strony z reprezentacjami podgrupy fazowej, a z drugiej zaś odpowiada liczbie elektronów n w rozważanym układzie. Oznacza to, że reprezentacja opisująca symetrię translacyjną w polu magnetycznym układu n elektronów to reprezentacja $\Gamma^{\kappa_x,\kappa_y,n}$. Na takie właśnie reprezentacje rozkłada się iloczyn tensorowy reprezentacji $M^{\otimes n}$ działającej w przestrzeni położeniowej n elektronów, gdzie M oznacza reprezentację magnetycznej grupy translacji określoną w przestrzeni stanów jednoelektronowych.

Reprezentacje nieprzywiedlne omawianych grup symetrii pozwalają wyznaczyć bazy dopasowane do symetrii translacyjnej (w polu magnetycznym) oraz permutacyjnej. Pierwsza zadana jest przez parametry (κ_x, κ_y, s) odpowiedniej reprezentacji nieprzywiedlnej oraz dodatkowy parametr β związany z krotnością reprezentacji $\Gamma^{\kappa_x,\kappa_y,s}$ w rozkładzie reprezentacji $M^{\otimes n}$. Pozwala to oznaczyć tę bazę, wyznaczoną z użyciem operatora rzutowania, jako $b_{irr}^{MTG} = \{|\kappa_x, \kappa_y, s, \beta\rangle\}$.

Baza $b_{irr}^{o} = \{|\lambda, t, y\rangle\}$ dopasowana do symetrii permutacyjnej, zadana jest z kolei poprzez partycje λ liczby n oraz bazy reprezentacji nieprzywiedlnych $t \in D^{\lambda}$ grupy unitarnej i $y \in \Delta^{\lambda}$ grupy symetrycznej. Baza ta musi być stowarzyszona, dla uzyskania pełnego opisu stanów, z odpowiednią bazą $b_{irr}^{s} = \{|\bar{\lambda}, y\rangle\}$ dla podprzestrzeni spinowej, gdzie $\bar{\lambda}$ oznacza partycję transponowaną, a y jest semistandardową tablicą Younga. Baza części „przestrzennej" została wyznaczona z wykorzystaniem operatora rzutowania, który wybiera z iloczynu stanów jednoelektronowych tylko takie, które wykazują żądaną symetrię ze względu na permutację cząstek.

Mając zdefiniowane bazy nieprzywiedlne (dopasowane do symetrii układu) można skonstruować macierze pozwalające przechodzić do tych baz z bazy położeniowej $b = \{|i, j\rangle\}$, gdzie i, j określają współrzędne elektronu w sieci kwadratowej.

Energie układu elektronów określono z wykorzystaniem hamiltonianu w przybliżeniu ciasnego wiązania, uzupełnionego o wyraz typu Hubbarda, odpowiedzialny za oddziaływanie odpychające elektronów znajdujących się na tym samym węźle i różniących się rzutem spinu. Hamiltonian ten można zdiagonalizować, a dokładniej mówiąc doprowadzić do postaci kwazidiagonalnej, dzięki przejściu z bazy położeniowej do baz dopasowanych do symetrii translacyjnej (liczbami kwantowymi są wówczas kwazipędy) i permutacyjnej (liczbą kwantową jest spin S). Dzięki macierzom opisującym przejście pomiędzy bazami, możliwe jest podanie dla każdego stanu zarówno wartości kwazipędów, a co za tym idzie wykreślenie pasma energii $E(\boldsymbol{k})$, jak i wyznaczenie całkowitego spinu S. W pracy nie uwzględniono efektu Zeemana związanego z polem magnetycznym, ale wprowadzenie takiego oddziaływania w ramach stosowanego modelu jest możliwe.

Obliczenia w pracy przeprowadzone zostały dla przypadku trzech elektronów. Taki wybór podyktowany był przede wszystkim koniecznością zachowania przejrzystości wywodu, który mógłby zostać przesłonięty przez „eksplozję kombinatoryczną" pojawiającą się dla wyższych wartości n. Metoda zobrazowana została na przykładzie skończonej sieci o rozmiarze 3×3 poddanej działaniu pola magnetycznego zadanego przez parametr $\eta = 1/3$. Rozważana sieć jest niewielka, natomiast może być efektywnie opisana i rozwiązana, a jest wystarczająca do prezentacji głównych cech fizycznych układu.

H7. A. Wal, *Band structure, Brillouin zone, and condensation of states for an itinerant electron in a magnetic quantum dot*, 2013, Physica B: Condensed Matter, **410**, 222–226.

Głównym celem pracy było opisanie struktury pasmowej w przybliżeniu ciasnego wiązania dla skończonej, dwuwymiarowej sieci umieszczonej w skwantowanym polu magnetycznym. Zastosowano warunki brzegowe Borna-Karmana, a wszystkie energie wyrażono w jednostkach całki przeskoku t określającej oddziaływanie najbliższych sąsiadów (oddziaływanie dalszych sąsiadów zostało pominięte). Zwykle strukturę taką określa się nad strefą Brillouina (BZ) wyznaczoną przez reprezentacje nieprzywiedlne grupy translacji, będącej grupą symetrii dwuwymiarowego kryształu. Obecność pola magnetycznego zmienia symetrię translacyjną wprowadzając w zamian nieabelową symetrię zadaną przez magnetyczną grupę translacji. Posiada ona podgrupę abelową H, która wyznacza nową strukturę w przestrzeni odwrotnej – tzw. magnetyczną strefę Brillouina (MBZ). Jest ona podzbiorem strefy Brillouina, $\mathrm{MBZ} \subset \mathrm{BZ}$, tzn. jest rozrzedzona w stosunku do zwykłej strefy. Maksymalna podgrupa abelowa definiująca MBZ może być wybrana na wiele sposobów, najczęściej jednak wybór prowadzi do rozrzedzenia BZ wzdłuż wybranego kierunku, np. y. Liczba dostępnych kwazipędów które tworzą MBZ jest q-razy mniejsza niż w przypadku BZ.

Nieabelowe własności MTG prowadzą do dodatkowego rozrzedzenia strefy Brillouina, tym razem w kierunku prostopadłym do poprzedniego. Jest to związane z relacją równoważności pomiędzy reprezentacjami nieprzywiedlnymi $\Gamma^{\kappa_x,\kappa_y,s}$ MTG. Relacja ta pojawia się jako naturalna konsekwencja procedury indukcji takich reprezentacji. Według tej procedury indukcję należy prowadzić dla reprezentantów orbit działania MTG na nieprzywiedlnych reprezentacjach podgrupy H. Określa to relację pomiędzy parametrami κ_x i $\kappa_x{}'$ oznaczającymi różne reprezentacje. Jeśli spełniają one warunek $\kappa_x' = \kappa_x + \eta j \bmod 1$, gdzie $j \in \mathbb{Z}$, to odpowiadające im reprezentacje nieprzywiedlne $\Gamma^{\kappa_x,\kappa_y,s}$ i $\Gamma^{\kappa_x',\kappa_y,s}$ są równoważne, co prowadzi także do równoważności kwazipędów k_x i k_x'. W konsekwencji zbiór nierównoważnych kwazipędów jest rozrzedzony q-krotnie wzdłuż kierunku x.

Strefa Brillouina powinna być zdefiniowania nad nierównoważnymi kwazipędami. Rozważania powyższe pokazuję, iż w efekcie strefa Brillouina w polu magnetycznym jest q^2-krotnie rozrzedzona, dając w efekcie magnetyczną pasmową strefę Brillouina (MBBZ). Zbiór kwazipędów należących do MBBZ tworzy bazę dla zdefiniowania struktury pasmowej w polu magnetycznym.

Proces rozrzedzenia jest związany z kondesacją stanów, ponieważ całkowita ich liczba musi pozostać niezmieniona. Powoduje to wzrost degeneracji pasm energetycznych przy przechodzeniu od BZ do MBZ, a w dalszej kolejności do MBBZ. W efekcie struktura pasm energii w skwantowanym polu magnetycznym składa się z q pasm, z których każde jest q-krotnie rozrzedzone. Stany charakteryzowane są przez liczby kwantowe κ_x, κ_y oraz γ i γ'. Parametry reprezentacji κ_x, κ_y tworzą MBBZ, a wskaźnik γ' numeruje magnetyczne podpasma, podczas gdy γ określa degenerację poziomu energii. Wprowadzając opis stanu poprzez macierz gęstości można określić miarę „zgodności" (ang. concurrence) pomiędzy dwoma stanami: pierwszym zadanym przez $\kappa_x, \kappa_y \in$ MBBZ i przez wskaźnik γ' oraz drugim odpowiadającym kwazipędowi $\boldsymbol{k}$ $\in$BZ. Dzięki tej mierze można określić, które stany ze strefy Brillouina są związane ze stanami $\boldsymbol{\kappa}$ $\in$MBBZ, a tym samym opisać liczbowo zjawisko kondensacji.

H8. A. Wal, *Energy bands for finite two-dimensional systems in a quantised magnetic field: the symmetry of the model*, 2013, Journal of Mathematical Chemistry, **51**, 2285–2316. Praca dotycząca pasm energetycznych dwuwymiarowych układów w skwantowanym polu magnetycznym. Kluczową rolę w opisie takich układów odgrywa symetria modelu opisana przez magnetyczną grupę translacji oraz grupę symetryczną i unitarną. Dwie ostatnie grupy wykorzystane są do analizy układów wieloelektronowych w schemacie dwoistości Weyla.

Praca przedstawia w zwartej formie metody stosowane do opisu elektronu w polu magnetycznym zawarte w innych pracach autora. Jej zasadniczą nowością jest usytuowanie uzyskanych wyników oraz odniesienie użytych metod do rezultatów otrzymanych przez innych badaczy. Umożliwia to przedstawienie prowadzonych badań na szerszym tle wraz ze wskazaniem ewentualnych zastosowań, także w innych obszarach nauk ścisłych, np. chemii kwantowej. Te zagadnienia poruszane są w szczególności we wstępie oraz podczas dyskusji własności magnetycznej grupy translacji i jej reprezentacji. W rozdziale poświęconym stanom wieloelektronowym zebrano dostępne odniesienia do literatury omawiającej tzw. „niefizyczne" reprezentacje, które przypisano właśnie tym stanom. Takie wzbogacenie pracy o szeroki przegląd literatury pozwala na określenie wzajemnych relacji pomiędzy różnymi metodami stosowanymi w analizie zagadnienia elektronu Blocha w polu magnetycznym.

Pracę rozpoczyna obszerny wstęp poświęcony zagadnieniu własnemu elektronu w polu magnetycznym. Zawarto w nim przegląd metod używanych do rozwiązania tego problemu, poczynając od elektronu swobodnego, a kończąc na analizie struktury pasm zdefiniowanych nad magnetyczną strefą Brillouina dla elektronu Blocha w polu magnetycznym. W kolejnych rozdziałach przedstawiono strukturę magnetycznej grupy translacji, wzajemne relacje pomiędzy cechowaniem a przyjętymi warunkami brzegowymi w przypadku skończonych modeli oraz reprezentacje nieprzywiedlne MTG. Przedstawiono dokładnie procedurę indukcji, która pozwala na wyznaczenie w łatwy sposób, także dla układów wieloelektronowych, reprezentacji nieprzywiedlnych. Przedstawione badania w większości opierały się na narzędziach dostarczanych przez teorię grup. Dzięki użyciu współczesnych programów komputerowych żmudne i sprawiające wrażenie skomplikowanych metody teorii grup, stają się efektywne i ułatwiają rozwiązywanie problemów fizycznych posiadających symetrię.

Publikacje naukowe ujęte w bazie Web of Science

(stan na dzień 14 sierpnia 2014)

Całkowita liczba publikacji: **31**

Sumaryczny impact factor według listy Journal Citation Reports (JCR), zgodnie z rokiem opublikowania: **26,71**

Liczba cytowań (według Web of Science): **74**

Liczba cytowań bez autocytowań: **43**

Średnia liczba cytowań przypadająca na jedną publikację: **2.39**

Indeks Hirscha (według Web of Science): **4**

Pełna lista publikacji i doniesień konferencyjnych zawarta jest w załączniku nr 4 (z uwzględnieniem wymagań określonych w Rozporządzeniu Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego z dnia 1 września 2011 r., Dz. U. nr 196. poz. 1165).

5. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo - badawczych

a) Problematyka badawcza przed uzyskaniem stopnia doktora

Po zatrudnieniu mnie na stanowisku asystenta w Instytucie Fizyki Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Rzeszowie moje zainteresowania naukowe koncentrowały się wokół zastosowania teorii grup do opisu własności niskowymiarowych skończonych kryształów. Skupiłem się w tym czasie na wyznaczaniu dokładnych rozwiązań modelu Heisenberga dla takich układów z wykorzystaniem podstawienia Bethego. Wynikiem tych badań był cykl publikacji z moim współautorstwem, w których analizowano strukturę rozwiązań magnetyka Heisenberga z wykorzystaniem grup symetrii, w tym tzw. symetrii ukrytych opisanych poprzez grupy automorfizmów. Współpraca w tym zakresie z dr Marianem Kuźmą z Rzeszowa oraz prof. Tadeuszem Lulkiem z Poznania zaowocowała wielokrotnym udziałem w międzynarodowych konferencjach organizowanych przez Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, a poświęconych symetriom i własnościom strukturalnym materii - „Symmetry and Structural Properties of Condensed Matter".

Wyniki uzyskane na tym etapie znalazły swój wyraz w pracy doktorskiej obronionej na Wydziale Fizyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. W pracy analizowałem symetrie układów skończonych wykorzystując receptę Weyla, zalecającą zbadanie symetrii ukrytych związanych z grupą automorfizmów grupy symetrii jawnych. W analogii do grup przestrzennych pełną symetrię układu opisuje w tym przypadku rozszerzenie grupy automorfizmów przez grupę symetrii modelu jednowymiarowego, tj. grupę translacji. Takie rozszerzenia dla liniowych skończonych układów zostały sklasyfikowane w oparciu o metodę Mac Lane'a. Druga część pracy poświęcona była własnościom pasm energii jednowymiarowych układów skończonych, tj. magnetykowi Heisenberga ze spinem $s=1/2$ na każdym węźle. Do opisu zagadnienia własnego takiego układu wykorzystano symetrię zadaną przez grupę translacji i grupę symetryczną (permutacja cząstek). Pozwoliło to na wyznaczenie skończonych odpowiedników pasm energetycznych. Wykazano istnienie pasm rozrzedzonych, tj. pasm określonych tylko dla wybranych kwazipędów k ze strefy Brillouina BZ. Takie podejście przy analizie widma pozwala na określenie wpływu liczby węzłów na kształt pasm energetycznych.

Brałem również udział w badaniach oddziaływania promieniowania laserowego na rozkład rtęci międzywęzłowej w półprzewodniku $Cd_xHg_{1-x}Te$. Dla potrzeb tych badań przygotowałem algorytm, a później program komputerowy symulujący rozkład przestrzenno-czasowy temperatury oraz koncentracji rtęci w tym półprzewodniku.

b) Problematyka badawcza po uzyskaniu stopnia doktora

Po obronie doktoratu moje badania toczyły się w głównej mierze dwutorowo. Kontynuowałem tematykę skoncentrowaną na jednowymiarowych magnetykach Heisenberga. Wspólnie ze współpracownikami z Rzeszowa, Poznania oraz z prof. Caspersem z University of Twente (Holandia) zastosowaliśmy, zaproponowaną przez niego metodę, do wyznaczania rozwiązań dla układów skończonych. Opiera się ona na wykorzystaniu rozwiązań asymptotycznych, łatwych do otrzymania dla dużej wartości liczby węzłów jednowymiarowego łańcucha Heisenberga. Procedura zaleca przyjęcie wyników asymptotycznych jako punktu startowego do znajdowania kolejnych rozwiązań dla malejących wartości N. Zakłada się przy tym, że zmiana otrzymywanych wartości rozwiązań przy zmianie długości łańcucha jest quasi ciągła przy zachowaniu stałej wartości parametrów równań Bethego, tzw. liczb zwojów λ_i. Dla specjalnych wartości N_s ciągłość ta zostaje zakłócona i obserwujemy wtedy zmianę charakteru rozwiązań, np. z rzeczywistych na zespolone. W zależności od istniejących po obu stronach punktu N_s rozwiązań, wyróżniliśmy trzy rodzaje punktów specjalnych: punkty krytyczne, punkty przejścia oraz punkty graniczne.

W omawianym okresie zajmowałem się także analizą struktury pasm energii dla skończonych liniowych magnetyków Heisenberga. Dzięki wykorzystaniu podstawienia Bethego oraz wspomnianej metodzie opartej na rozwiązaniach asymptotycznych, analizowałem strukturę pasmową dla skończonych i niewielkich wartości N, zarówno w funkcji kwazipędów jak i całkowitego spinu układu. W widmie energii wyróżniono stany związane i rozproszeniowe. Najniższe energetycznie stany ferromagnetyczne zostały opisane z wykorzystaniem modelu pasm rotacyjnych[17]. Dla małych układów, $N < 10$, obserwowano niewielkie rozbieżności wyników otrzymanych w modelu pasm rotacyjnych i za pomocą równań Bethego.

Procedura wyznaczenia rozwiązań zagadnienia własnego dla magnetyka Heisenberga XXX ze spinem ½ może być usprawniona dzięki wprowadzeniu bazy profili falowych (ang. basis of wavelets). Pozwala ona na redukcję N razy wymiaru zagadnień sekularnych dzięki wykorzystaniu symetrii translacyjnej układu opisanej przez grupę cykliczną C_N. Klasyczna przestrzeń konfiguracyjna układu $Q^{(r)}$ redukuje się wtedy do podprzestrzeni rozpiętej na orbitach grupy symetrii translacyjnej C_N, gdzie r oznacza liczbę dewiacji spinowych w stosunku do stanu próżni (stan próżni - rzuty spinów są równoległe). W ten sposób macierz hamiltonianu określonego w przestrzeni $Q^{(r)}$ redukuje się dla każdego kwazipędu k ze strefy Brillouina do podmacierzy określonej w zredukowanej podprzestrzeni konfiguracyjnej $T = Q^{(r)}/C_N$.

Głównym wynikiem badań dotyczących tej tematyki była pełna charakterystyka rozwiązań skończonych jednowymiarowych magnetyków Heisenberga, w tym także w języku kombinatorycznym z wykorzystaniem tzw. „konfiguracji ożaglowanych", tj. kombinatorycznych obiektów służących do klasyfikacji ścisłych rozwiązań podstawienia Bethego (Bethe Ansatz). Dzięki nim możliwe jest znajdowanie i klasyfikowanie wartości własnych na drodze rozważań kombinatorycznych, bez konieczności rozwiązywania zagadnień sekularnych.

Po napisaniu pracy doktorskiej swoje zainteresowania poszerzyłem o własności dwuwymiarowych dyskretnych układów poddanych działaniu skwantowanego pola

[17] J. Schnack, M. Luban, Phys. Rev., B **63**, 014418 (2000).

magnetycznego. Tematyka ta stała się dominująca w ostatnich sześciu latach i zaowocowała cyklem samodzielnych artykułów poświęconych zastosowaniom magnetycznych grup translacji do opisu własności elektronu w periodycznym potencjale i w skwantowanym polu magnetycznym. Ta problematyka badawcza została dokładnie omówiona w części opisującej osiągnięcie naukowe.

c) Plany badawcze na najbliższe lata

W najbliższym czasie planuję połączenie, dotychczas oddzielnie prowadzonych, badań układów jedno- i dwuwymiarowych w ramach metody algebraicznego podstawienia Bethego[18]. Dla wybranych wartości kwazipędów ze strefy Brillouina elektronu w dwuwymiarowym potencjale periodycznym i skwantowanym polu magnetycznym zagadnienie własne może być rozwiązane z wykorzystaniem wymienionej metody, używanej przeze mnie już wcześniej w przypadku jednowymiarowego magnetyka Heisenberga. Szczególnie obiecujące wydaje się, w tym kontekście, zastosowanie dodatkowo hipotezy strun, pozwalającej znajdować rozwiązania asymptotyczne dla bardzo dużych wartości parametru q opisującego pole.

W świetle dotychczas uzyskanych wyników trudną, lecz obiecująca problematyką jest znalezienie trafnych fizycznie i rozwiązywalnych matematycznie warunków brzegowych dla układów nanoskopowych w polu magnetycznym. Nowoczesne centrum naukowe powstałe na Wydziale Matematyczno-Przyrodniczym Uniwersytetu Rzeszowskiego daje okazję do połączenia intuicji matematycznych z realiami nanotechnologii. Będzie to możliwe dzięki zgromadzonej w centrum aparaturze pozwalającej w szczególności wytwarzać niskowymiarowe struktury, zarówno w technice MBE, jak i z wykorzystaniem nanolitografii. Dostępne są także przyrządy do badania transportu elektronowego w strukturach niskowymiarowych w silnych polach magnetycznych i w bardzo niskich temperaturach.

d) Wyróżnienia wynikające z prowadzonych badań naukowych

1997	Nagroda II stopnia Rektora Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Rzeszowie za ważne osiągnięcia naukowe.
2008, 2010, 2012	Nagroda Dziekana Wydziału Matematyczno-Przyrodniczego Uniwersytetu Rzeszowskiego; trzykrotnie nagroda za osiągnięcia w pracy naukowej.

[18] P. Wiegmann and A. Zabrodin, Phys. Rev. Lett. **72**, 1890–1893 (1994); K. Hoshi, and Y. Hatsugai, Phys. Rev. B **61**, 4409–4412 (2000).

e) Uczestnictwo w organizacjach/Pełnione funkcje

Od 2003	Członek Rady Wydziału Matematyczno-Przyrodniczego Uniwersytetu Rzeszowskiego
Od 2004	Członek Polskiego Towarzystwa Fizycznego
Od 2010	Członek Podkarpackiego Klastra Energii Odnawialnej, Stowarzyszenie Podkarpacka Ekoenergetyka

f) Pobyty naukowe krajowe i międzynarodowe

1995	Uniwersytet w Bayreuth (Niemcy), stypendium DAAD, 5 miesięcy
2003, 2005	Uniwersytet Twente (Enschede, Holandia), krótki pobyt (tydzień)
2009	Uniwersytet Śląski w Katowicach, staż podoktorski, 4 miesiące
2012	Uniwersytet Południowej Australii (Adelaide, Australia), krótki pobyt (10 dni)

Rzeszów, 14 sierpnia 2014

Andrzej Wal