ANEMOMETRIA LASEROWA

1. Wstęp

Anemometria laserowa pozwala na bezdotykowy pomiar prędkości poruszania się cząsteczek (elementów) rozpraszających światło. Pomiar dokonuje się za pomocą światła laserowego, którego wiązka jest podzielona na dwie wiązki. Wiązki te są skupiane na poruszającym się obiekcie. Prędkość poruszającego się obiektu wyznacza się przez pomiar częstości prążków interferencyjnych.

Zjawiska występujące przy rozproszeniu światła opisywane są na dwa sposoby dające ten sam końcowy rezultat.

2. Model dopplerowski

2..1 Efekt Dopplera

Efekt Dopplera polega na zmianie częstotliwości (długości) fali w wyniku względnego ruchu źródła fali i obserwatora. W optyce efekt Dopplera wyraża się wzorem

$$\lambda_D = \lambda_0 \frac{1 - (v/c)\cos\beta}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \tag{1}$$

gdzie $v\cos\beta$ jest rzutem prędkości źródła względem na kierunek obserwacji, a β jest kątem między wektorem prędkości źródła a kierunkiem obserwacji.

Z (1) wynika, że nawet jeśli $\beta = \pi/2$, to obserwuje się przesunięcie dopplerowskie długości fali, co nie występuje w przypadku akustycznego efektu Dopplera.

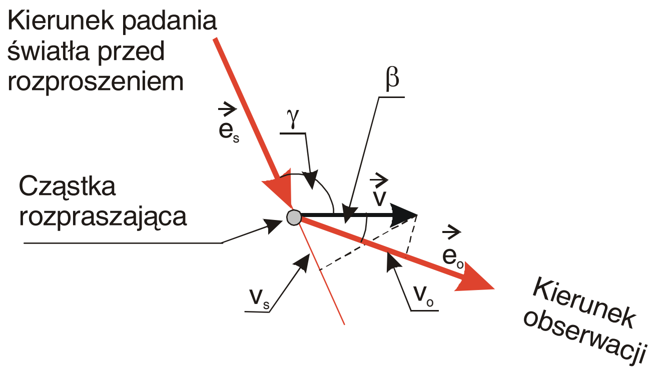
Jeżeli $v \ll c$, wtedy, pomijając pierwiastek relatywistyczny, wyrażenie (1) możemy rozwinąć w szereg

$$\nu_D = \nu_0 \left(1 + \frac{v}{c}\cos\beta\right).$$

Załóżmy, że źródło światła (laser) znajduje się w spoczynku. Promień laserowy pada na poruszający się obiekt, którego prędkość mamy wyznaczyć. W eksperymencie polegającym na badaniu częstości światła rozproszonego na poruszających się obiektach mamy do czynienia z dwoma procesami opisywanymi związkiem Dopplera, a wielkość przesunięcia zależy, poza prędkością obiektu, od geometrii eksperymentu.

1. Niech wiązka rozpraszana jest na obiekcie poruszającym się z prędkością $\vec{v}$ pod kątem γ w stosunku do wiązki rozchodzącej się wzdłuż wektora $\vec{e}_s$ (rys. 1). Występuje przesunięcie częstości i „widziana" przez cząstkę częstość światła wynosi ν'. To promieniowanie jest rozpraszane.

2. Z kolei, niech kierunek obserwacji wyznaczony przez wektor $\vec{e}_o$ tworzy z prędkością $\vec{v}$ kąt β. Światło o częstości ν' jest rozpraszane na cząstce poruszającej się względem obserwatora, a to znaczy, że obserwator rejestruje częstość ν" również przesuniętą dopplerowsko.



Rys. 1. Geometria rozpraszania światła na cząsteczce

Rzut prędkości $\vec{v}$ na kierunek propagacji światła rozpraszanego wynosi

$$v_s = v\cos(\pi - \gamma)\,,$$

a częstość mierzonego promieniowania wyraża się wzorem

$$\nu' = \nu_0 \left(1 - \frac{v}{c}\cos\gamma\right). \tag{2}$$

Zatem prędkość zbliżania się do detektora źródła promieniowania rozproszonego

$$v_o = v\cos\beta.$$

Tak więc częstość światła rozproszonego obserwowana wzdłuż wektora $\vec{e}_o$ wynosi

$$\nu'' = \nu' \left(1 + \frac{v}{c}\cos\beta\right).$$

Stąd częstość promieniowania rejestrowana przez detektor wyraża się następująco

$$\begin{aligned} \nu'' &= \nu_0 \left(1 - \frac{v_s}{c}\right)\left(1 + \frac{v_o}{c}\right) = \\ & \nu_0 \left(1 - \frac{v_s}{c} + \frac{v_o}{c} - \frac{v_s}{c}\frac{v_o}{c}\right). \end{aligned}$$

Odrzucamy ostatni wyraz jako mały i otrzymujemy

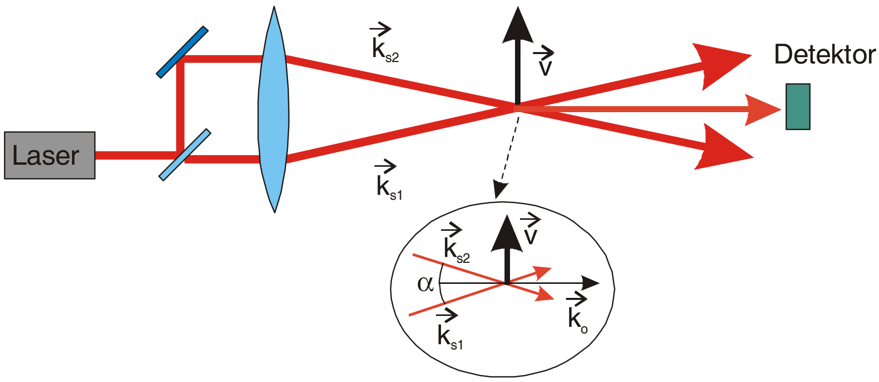
$$\begin{aligned} \nu'' &= \nu_0 \left(1 - \frac{v_s}{c} + \frac{v_o}{c}\right) = \\ &= \nu_0 \left[1 - \frac{\vec{v} \cdot (\vec{e}_s - \vec{e}_o)}{c}\right]. \end{aligned}$$

Stąd zmianę częstości przy oświetleniu jedną wiązką wyznaczamy ze wzoru

$$|\Delta\nu| = |\nu'' - \nu| = \nu_0 \frac{\vec{v} \cdot (\vec{e}_s - \vec{e}_o)}{c}.$$

2..2 Rozpraszanie skrzyżowanych wiązkach

Pomiar prędkości przeprowadza się w układzie pomiarowym przedstawionym na rys. 2.



Rys. 2. Schemat układu doświadczalnego

Za pomocą soczewki o ogniskowej f krzyżuje się pod kątem α dwie wiązki laserowe o wektorach falowych $\vec{k}_{s1}$ i $\vec{k}_{s2}$ (rys.2). Padają na obiekt poruszający się z prędkością $\vec{v}$ prostopadle do dwusiecznej kąta zawartego między wiązkami (kierunek z). Zatem ponieważ kąt $\beta = \pi/2$, to $\cos\beta = 0$, natomiast kąty między wiązkami a wektorem prędkości cząstki rozpraszającej wynoszą

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2},\\ \gamma_2 &= \frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}.\end{aligned}$$

Przesunięcie dopplerowskie częstości obserwowane przez detektor dla jednej i dla drugiej wiązki z (2) wynoszą

$$\Delta\omega_1 = \nu\frac{v}{c}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right) = \nu\frac{v}{c}\sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right)$$

i

$$\Delta\omega_2 = \nu\frac{v}{c}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right) = \nu\frac{v}{c}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Niech

$$\begin{aligned}E_1 &= E_0\exp\left[i\left(\omega_1 t - k_1 z\right)\right],\\ E_2 &= E_0\exp\left[i\left(\omega_2 t - k_2 z\right)\right],\end{aligned}$$

gdzie: $\omega_{1,2} = \omega_0 + \Delta\omega_{1,2}$.

W wyniku interferencji występują dudnienia obserwowane jako zmiany natężenia światła w czasie, ponieważ

$$\begin{aligned}I &= \left(E_1+E_2\right)^2 = \\ &= 2E_0^2 + 2E_0^2\exp\left\{\left[i\left(\omega_1 t - k_1 z\right)\right] + \left[-i\left(\omega_2 t - k_2 z\right)\right]\right\} = \\ &= 2I_0 + 2I_0\exp\left\{i\left[\left(\omega_1-\omega_2\right)t + \left(k_2-k_1\right)z\right]\right\}. \qquad (3)\end{aligned}$$

Tak więc część rzeczywista (3) wynosi

$$I\left(t\right) = 2I_0\left[1+\cos\left(\Delta\omega t\right)\right].$$

Podstawiając odpowiednie wartości otrzymujemy, że

$$I\left(t\right) = 2I_0\left\{1+\cos\left[2\frac{2\pi}{\lambda}v\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)t\right]\right\},$$

a to znaczy, że częstotliwość dudnień będzie wynosić

$$f = \frac{2v}{\lambda}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Stąd znając częstotliwość dudnień możemy wyznaczyć prędkość cząsteczki.

Z parametrów układu optycznego znajdujemy kąt między wiązkami

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{d}{\sqrt{d^2+f^{\,2}}}. \qquad (4)$$

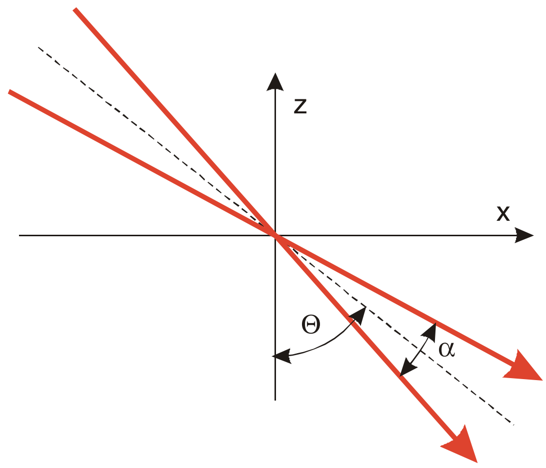
3. Model prążkowy

3..1 Interferencja skrzyżowanych wiązek

Przyjmijmy, że wiązki światła o takim samym natężeniu

$$\begin{aligned} E_1 &= E_0 \exp\left(i\phi_1\right), \\ E_2 &= E_0 \exp\left(i\phi_2\right), \end{aligned}$$

krzyżują się pod kątem α padają na ekran tak, że dwusieczna kąta α tworzy kąt Θ z normalną (z) do ekranu (równoległy do osi x) (rys. 3)



Rys. 3. Schemat interferencji dwu wiązek na ekranie wzdłuż osi x

Fazy fal

$$\phi = \vec{k} \cdot \vec{r}.$$

dla dwu wymiarów wynoszą (pomijając część czasową)

$$\begin{aligned} \phi_1 &= k\left[x \sin\left(\Theta - \frac{\alpha}{2}\right) + z \cos\left(\Theta - \frac{\alpha}{2}\right)\right], \\ \phi_2 &= k\left[x \sin\left(\Theta + \frac{\alpha}{2}\right) + z \cos\left(\Theta + \frac{\alpha}{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Na ekranie wiązki interferują i natężenie wypadkowe wynosi

$$I = \left(E_1 + E_2\right)^2.$$

Pojawienie się prążków interferencyjnych zależy od różnicy faz

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= k\left\{\left[x\sin\left(\Theta-\frac{\alpha}{2}\right)+z\cos\left(\Theta-\frac{\alpha}{2}\right)\right]-\right.\\ &\left.-\left[x\sin\left(\Theta+\frac{\alpha}{2}\right)+z\cos\left(\Theta+\frac{\alpha}{2}\right)\right]\right\}\\ &= 2k\sin\frac{\alpha}{2}\left(-x\cos\Theta+z\sin\Theta\right). \qquad (5)\end{aligned}$$

Wypadkową falę w płaszczyźnie $(x,\,y)$ zapiszemy jako

$$E_0\exp\left[i(\omega t-\Delta\phi\right]=E_0\exp\left\{i\left[\omega t-2k\left(-x\cos\Theta+z\sin\Theta\right)\sin\frac{\alpha}{2}\right]\right\}. \qquad (6)$$

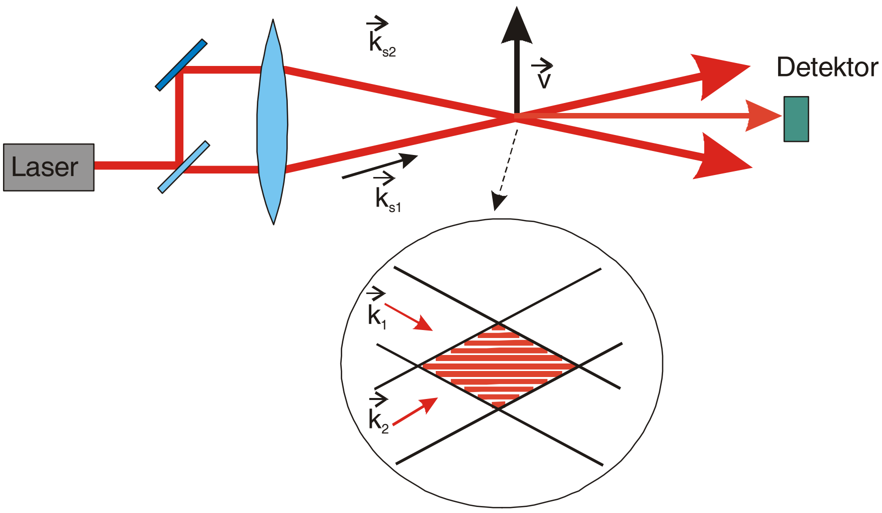
Jeżeli oznaczymy

$$\lambda'=\frac{\lambda}{2\sin\left(\alpha/2\right)}$$

Tak więc czynnik fazowy przyjmie postać

$$\cos\frac{2\pi}{\lambda'}\left(z\sin\Theta-x\cos\Theta\right).$$

Równanie (6) przedstawia falę płaską o wektorze falowym o długości $2\pi/\lambda'$ tworzącym z osią x kąt Θ.



Rys. 4. Schemat aparatury i obraz interferencyjny w obszarze przecinania się wiązek

Jak wynika z (5) długość nowego wektora falowego wynosi

$$k' = \frac{2\pi}{\lambda'} = 2k \sin\frac{\alpha}{2} = 2\frac{2\pi}{\lambda}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Dla $\Theta = 0$ odległość między prążkami interferencyjnymi w płaszczyźnie ekranu wyraża się wzorem

$$d = \frac{\lambda}{2\sin(\alpha/2)}.$$

Prążki są równoległe do dwusiecznej kąta α.

Schemat aparatury pomiarowej przedstawia rys. 4.

4. Wyznaczenie prędkości

Bez względu na zastosowany opis problem polega na zmierzeniu częstotliwości zmian natężenia promieniowania w czasie. W obu przypadkach

$$f = \frac{2v\sin(\alpha/2)}{\lambda}.$$

W jednym przypadku jest to częstotliwość zdudnień, a w drugim – częstotliwość przechodzenia cząsteczek rozpraszających przez maksima interferencyjne w obszarze nakładania się wiązek. Z (4) wyznaczamy kąt α i stąd znamy prędkość.

W rozwiązaniach eksperymentalnych częstotliwość można wyznaczyć stosując procedurę szybkiej transformaty Fouriera (FFT).

5. Literatura

1. Kjell J. Gåsvik, *Optical metrology*, John Wiley & Sons, Chichester –New York 1995.