

Instytut Fizyki
Uniwersytet Mikołaja Kopernika

Piotr Targowski i Bernard Ziętek

Pracownia Optoelektroniki

Specjalność: Fizyka Medyczna

BADANIE WŁASNOŚCI ŁĄCZA

ŚWIATŁOWODOWEGO

Zadanie VI

Zakład Optoelektroniki

Toruń 2002

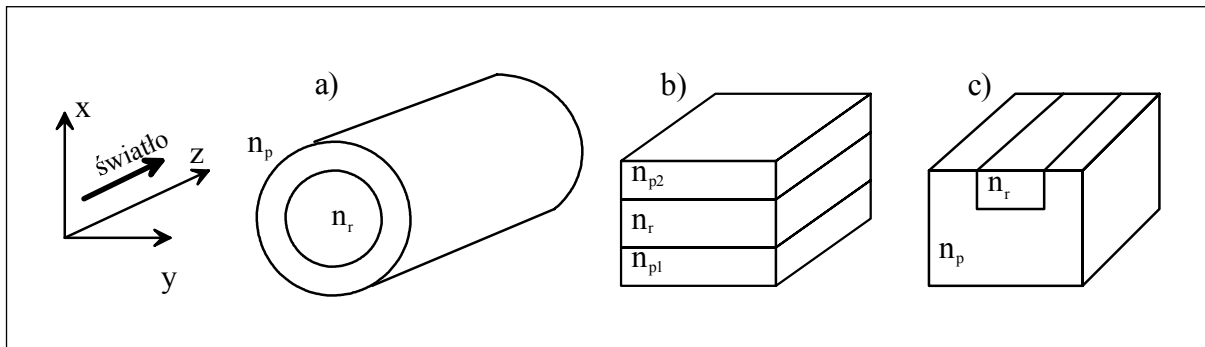
I. Cel zadania

Celem zadania jest zapoznanie studentów z podstawami techniki światłowodowej.

II. Zagadnienia teoretyczne

A. Zagadnienia podstawowe

Światłowód (falowód optyczny) służy do przesyłania fal elektromagnetycznych w zakresie optycznym. W każdym światłowodzie można wyróżnić *rdzeń* i *płaszcz*. Ze względu na budowę rozróżniamy światłowody cylindryczne (Rys.1a), płaskie czyli planarne (Rys. 1b), paskowe (Rys. 1c) i inne.

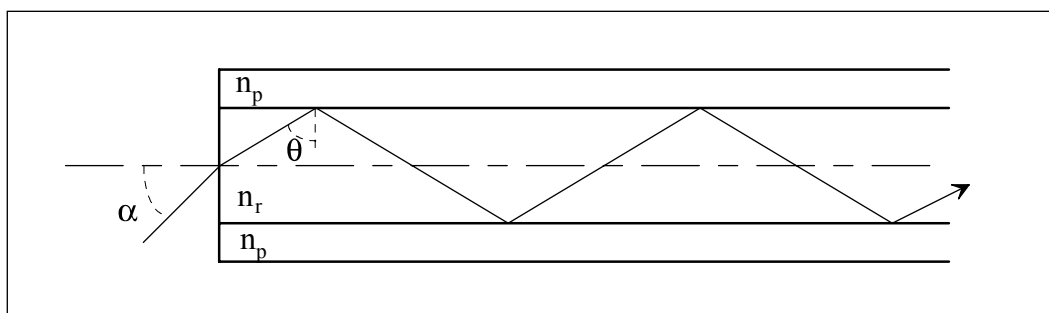


Rys.1. Rodzaje światłowodów. Fala rozchodzi się w kierunku osi z

Światło prowadzone jest w światłowodzie dzięki *całkowitemu wewnętrznemu odbiciu* na granicy rdzeń (współczynnik załamania n_r) - płaszcz (współczynnik załamania n_{p1} i n_{p2}). Tak więc oczywiście:

$$n_r > n_p \quad (1)$$

Rysunek 2 ilustruje tę zasadę dla światłowodu symetrycznego ($n_{p1} = n_{p2} = n_p$).



Rys. 2. Promień światła wchodzi do światłowodu pod kątem α do osi optycznej, odbija się od granicy rdzeń - płaszcz pod kątem θ do normalnej.

Jak widać z rysunku, tylko promienie wchodzące do światłowodu pod kątem mniejszym niż kąt akceptacji ulegają całkowitemu wewnętrznemu odbiciu na granicy rdzeń - płaszcz. Prawo załamania (Snella) prowadzi do następującej zależności pomiędzy kątami α i θ :

$$n_r = \frac{\sin \alpha}{\sin(90^\circ - \theta)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \theta} \quad (2)$$

Warunek całkowitego wewnętrznego odbicia można zapisać w postaci: $\sin \theta \geq \frac{n_p}{n_r}$. Tak więc maksymalny kąt akceptacji:

$$\alpha_{\max} = \arcsin \sqrt{n_r^2 - n_p^2}, \quad (3)$$

gdzie $\sqrt{n_r^2 - n_p^2}$ nazywa się *aperturą numeryczną* światłowodu.

B. Mody TE i TM w światłowodzie

Fala rozchodząca się w światłowodzie zależy od współrzędnej z poprzez stałą propagacji β , odpowiadającą wektorowi falowemu dla fali płaskiej:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}_0(x, y) \exp[i(\omega t - \beta z)] \quad (4a)$$

$$\vec{H}(x, y, z, t) = \vec{H}_0(x, y) \exp[i(\omega t - \beta z)] . \quad (4b)$$

Taka postać rozwiązań pozwala zdefiniować prędkość fazową fali w światłowodzie v_{ef} oraz efektywny współczynnik załamania n_{ef} jako:

$$v_{ef} = \frac{\omega}{\beta}, \quad n_{ef} = \frac{c}{v_{ef}} = \frac{c}{\omega} \beta . \quad (5)$$

Podstawiając funkcje (4) do równań Maxwell'a uzyskuje się następujące równania na zespolone składowe wektorów \vec{E} i \vec{H} .

$$E_x = \frac{-i}{\omega^2 \mu_0 \epsilon - \beta^2} \left[\beta \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial y} \right] \quad (6a)$$

$$E_y = \frac{-i}{\omega^2 \mu_0 \epsilon - \beta^2} \left[\beta \frac{\partial E_z}{\partial y} - \omega \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial x} \right] \quad (6b)$$

$$H_x = \frac{-i}{\omega^2 \mu_0 \epsilon - \beta^2} \left[\beta \frac{\partial H_z}{\partial x} - \omega \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} \right] \quad (6c)$$

$$H_y = \frac{-i}{\omega^2 \mu_0 \epsilon - \beta^2} \left[\beta \frac{\partial H_z}{\partial y} + \omega \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} \right] \quad (6d)$$

$$E_z = \frac{-i}{\omega \epsilon} \left[\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right] \quad (6e)$$

$$H_z = \frac{i}{\omega \mu_0} \left[\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right] \quad (6f)$$

Dodatkowo, składowe zespolone spełniają równania falowe:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\omega^2 \mu_0 \epsilon - \beta^2) \right] H_z = 0 . \quad (6g)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\omega^2 \mu_0 \varepsilon - \beta^2) \right] E_z = 0 \quad (6h)$$

Oczywiście częstość kątowna ω powiązana jest z długością k wektora falowego w danym ośrodku zwykłą relacją:

$$\omega^2 \mu_0 \varepsilon = k_0^2 n^2 = k^2; \quad k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \quad (7)$$

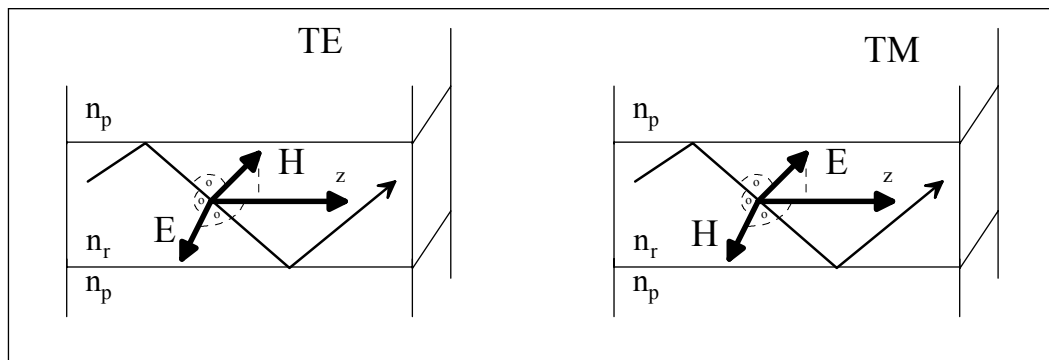
gdzie: k_0 jest długością wektora falowego w próżni, n współczynnikiem załamania ośrodka. Należy również zauważyć, że jeżeli ośrodek nie wprowadza strat ani wzmocnienia, to znaczy jest idealnie przezroczysty, to wszystkie stałe w równaniu (7) są rzeczywiste.

Aby rozwiązania równań (6g) i (6h) opisywały falę koniecznym jest, by wyrażenie w nawiasie () było różne od zera, czyli $\beta \neq k$. Innymi słowy prędkość fazowa fali w światłowodzie v_{ef} (5), **różni się** od prędkości fali płaskiej o tej samej częstości ω rozchodzącej się w nieograniczonym dielektryku o współczynniku załamania rdzenia.

Wśród równań (6) występują więc niezależne równania falowe (6g) i (6h). Oznacza to, że bez względu na rodzaj światłowodu, można wyróżnić dwa rodzaje (mody) fali elektromagnetycznej propagującej w światłowodzie. Decyduje o tym rodzaj składowej pola prostopadłej do kierunku propagacji z (Rys. 3). Oczywiście zawsze oba pola E i H są prostopadłe do *chwilowego* kierunku promienia, bo fala elektromagnetyczna jest falą poprzeczną. **Mod TE** charakteryzuje się tym, że **pole E jest zawsze prostopadłe do kierunku propagacji z** , a pole H zmienia kierunek przy kolejnych odbiciach. Natomiast **mod TM** charakteryzuje się tym, że pole H (magnetyczne) jest prostopadłe do z . W konsekwencji:

$$E_z = 0; \quad H_z \neq 0 \quad \text{dla modu TE,} \quad (8a)$$

$$H_z = 0; \quad E_z \neq 0 \quad \text{dla modu TM.} \quad (8b)$$

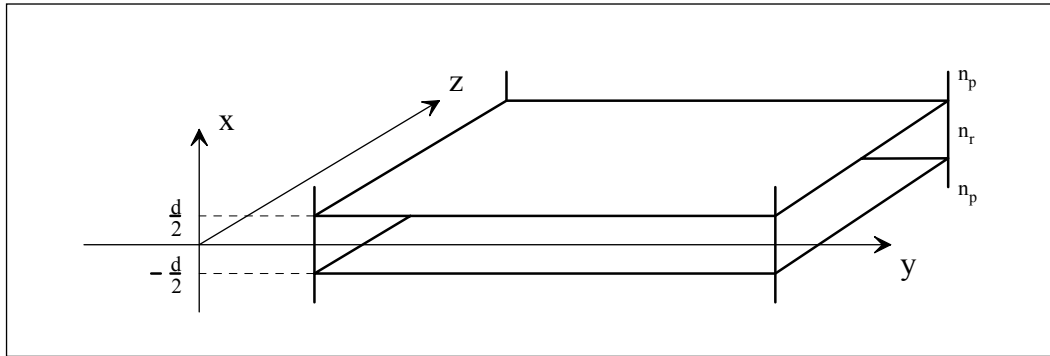


Rys. 3. Mody TE ($\vec{E} \perp \vec{z}$) i TM ($\vec{H} \perp \vec{z}$) w światłowodzie

C. Mody prowadzone w światłowodzie

Mimo, że w większości przypadków, zwłaszcza w telekomunikacji, używane są światłowody cylindryczne, opis światłowodu planarnego (najprostszy matematycznie) pozwala poznać wiele wspólnych własności wszystkich światłowodów.

Rozpatruje się światłowód symetryczny, o rdzeniu o grubości d , rozciągającym się do nieskończoności w kierunku $+y$ i $-y$ (Rys. 4).



Rys. 4. Model światłowodu planarnego.

W takim światłowodzie żadna wartość współrzędnej y nie jest wyróżniona, inaczej mówiąc żadna wielkość opisująca pole nie może zależeć od y . Oznacza to, że w równaniach (6) można położyć wszędzie:

$$\frac{\partial}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

Rozpatrzmy mod TE. Wówczas:

$$\text{z (6a), na podstawie (8a) i (9): } E_x = 0 \quad (10a)$$

$$\text{z (6b), na podstawie (9) i (6f): } E_y \neq 0; \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + [\omega^2 \mu_0 \varepsilon - \beta^2] E_y = 0 \quad (10b)$$

$$\text{przepisując (8a): } E_z = 0 \quad (10c)$$

z (6c), uwzględniając (9) i wstawiając (6f) i (10b):

$$H_x \neq 0; \quad H_x = \frac{-\beta}{\omega \mu_0} E_y \quad (10d)$$

$$\text{z (6d), na podstawie (8a) i (9): } H_y = 0 \quad (10e)$$

$$\text{z (6f), na podstawie (9): } H_z \neq 0; \quad H_z = \frac{i}{\omega \mu_0} \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (10f)$$

Równanie (10b) nosi nazwę *równania Helmholtza*. Należy zauważyć, że pozostałe niezerowe składowe pól E i H występujące w (10) można wyznaczyć z E_y . Tak więc wystarczy rozwiązać równanie (10b), aby wyznaczyć wszystkie składowe wektorów pola elektromagnetycznego.

Rozwiążmy równanie (10b) dla światłowodu symetrycznego (Rys. 4), charakteryzującego się skokową zmianą współczynnika załamania na granicy rdzeń - płaszcz:

$$n = \begin{cases} n_r; & |x| \leq \frac{d}{2} \\ n_p; & |x| > \frac{d}{2} \end{cases} \quad (11)$$

Uwzględniając (7), można więc napisać równanie (10b) dla obu ośrodków:

$$\text{dla rdzenia:} \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \left(n_r^2 k_0^2 - \beta^2 \right) E_y = 0; \quad |x| \leq \frac{d}{2} \quad (12a)$$

$$\text{dla płaszczu:} \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \left(n_p^2 k_0^2 - \beta^2 \right) E_y = 0; \quad |x| > \frac{d}{2} \quad (12b)$$

Celem dalszych obliczeń jest wyznaczenie β . Poszukuje się rozwiązań propagujących (oscylujących) w rdzeniu i równocześnie nie propagujących (gasnących) w płaszczu. Inaczej mówiąc równanie (12a) musi być równaniem oscylatora, a równanie (12b) odpowiadać przypadkowi braku oscylacji. Jest to równoznaczne z żądaniem, aby współczynnik w równaniu (10a) był dodatni, a w równaniu (10b) ujemny (porównaj równanie oscylatora harmonicznego $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$). Tak więc wprowadzając rzeczywiste stałe κ i γ warunki na istnienie i brak oscylacji w rozwiązaniach równań (12a) i (12b) można odpowiednio zapisać w postaci:

$$n_r^2 k_0^2 - \beta^2 = \kappa^2 > 0 \quad (13a)$$

oraz

$$n_p^2 k_0^2 - \beta^2 = -\gamma^2 < 0 \quad (13b)$$

Równocześnie otrzymuje się:

$$n_r^2 k_0^2 > \beta^2 > n_p^2 k_0^2 \quad \text{albo na podstawie (5) i (7)} \quad n_r > n_{ef} > n_p \quad (14)$$

Wiadomo z elektrodynamiki ogólnej, że na granicy ośrodków z nieciągłym współczynnikiem załamania składowe styczne natężeń pól elektrycznego i magnetycznego (E i H) muszą być ciągłe. W omawianym przypadku (Rys. 3 i Rys. 4 oraz równania (10)) są to składowe w kierunku y i z . Składowe tożsamościowo równe 0 są ciągłe automatycznie. Pozostają składowe E_y i H_z . Na podstawie (10d) oznacza to ciągłość E_y oraz jej pierwszej pochodnej po x .

Tak więc pole elektryczne w rdzeniu (4a) można w ogólności zapisać w postaci:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \hat{y} [A_1 \cos(\kappa x) + A_2 \sin(\kappa x)] \exp[i(\omega t - \beta z)] \quad |x| \leq \frac{d}{2} \quad (15)$$

natomiast pole w płaszczu, po uwzględnieniu warunku ciągłości składowej E_y :

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \hat{y} \left[A_1 \cos\left(\kappa \frac{d}{2}\right) + A_2 \left(\frac{|x|}{x}\right) \sin\left(\kappa \frac{d}{2}\right) \right] \exp \left[-\gamma \left(|x| - \frac{d}{2} \right) \right] \cdot \exp[i(\omega t - \beta z)] \quad |x| > \frac{d}{2} \quad (16)$$

Należy zauważyć, że:

w przypadku: $A_2 = 0 \Rightarrow \vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}(-x, y, z, t)$ - **mod parzysty**

w przypadku: $A_1 = 0 \Rightarrow \vec{E}(x, y, z, t) = -\vec{E}(-x, y, z, t)$ - **mod nieparzysty.**

Wymóg ciągłości pochodnej prowadzi do dodatkowego warunku, wiążącego κ i γ :

dla modów parzystych:

$$-A_1 \kappa \sin(\kappa \frac{d}{2}) = A_1 \cos(\kappa \frac{d}{2}) (-\kappa) \quad \text{albo:} \quad \left(\kappa \frac{d}{2}\right) \operatorname{tg}\left(\kappa \frac{d}{2}\right) = \gamma \frac{d}{2} \quad (17a)$$

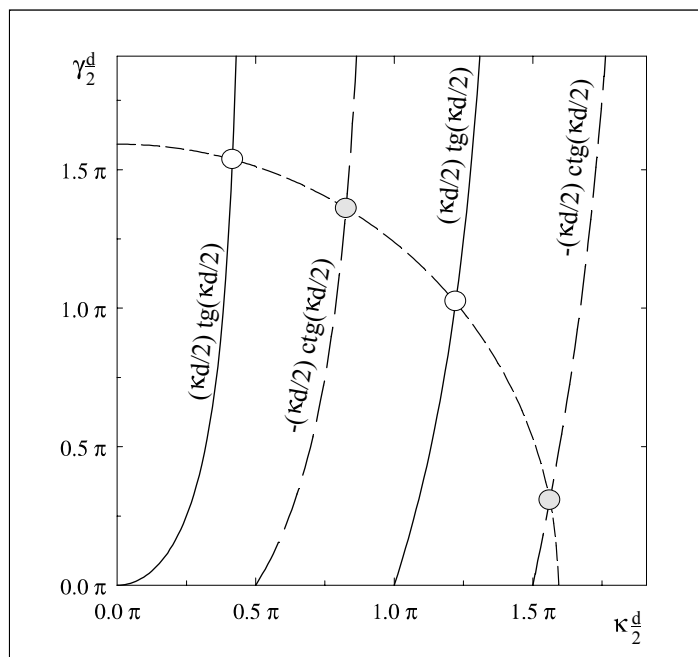
dla modów nieparzystych:

$$A_2 \kappa \cos(\kappa \frac{d}{2}) = A_2 \sin(\kappa \frac{d}{2}) (-\kappa) \quad \text{albo:} \quad -\left(\kappa \frac{d}{2}\right) \operatorname{ctg}\left(\kappa \frac{d}{2}\right) = \gamma \frac{d}{2} \quad (17b)$$

Dodatkowo obliczmy:

$$\left(\kappa \frac{d}{2}\right)^2 + \left(\gamma \frac{d}{2}\right)^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 [n_r^2 k_0^2 - \beta^2 + \beta^2 - n_p^2 k_0^2] = \left(\frac{d}{2}\right)^2 [n_r^2 - n_p^2] k_0^2 = \text{const} \quad (18)$$

Warunek (18) wraz z odpowiednim warunkiem (17) stanowią układ równań, pozwalający wyznaczyć κ i γ . Niestety, układ ten nie daje się rozwiązać analitycznie. Interesujących informacji dostarczyć może rozwiązanie graficzne (Rys. 5). W tym celu wykreśla się funkcje (17a) i (17b) we współrzędnych $(\kappa d/2)$ i $(\gamma d/2)$. W tych współrzędnych równanie (18) opisuje ćwiartkę okręgu (tylko współrzędne dodatnie mają sens fizyczny). Przecięcia odpowiednich krzywych wyznaczają dozwolone wartości κ i γ (oznaczone "o" na Rys. 5)



Rys. 5 Przykład rozwiązania graficznego równania światłowodu, propagują 4 mody, — mody parzyste, - - - mody nieparzyste.

Wnioski:

1. Pole w światłowodzie daje się opisać za pomocą 3 parametrów materiałowych: n_r , n_p , d .
2. Tylko pewne określone wartości parametrów κ i γ są dozwolone. Rozwiązania te nazywamy **modami światłowodu**. Znając κ można z równania (13a) wyznaczyć $\beta = \sqrt{n_r^2 k_0^2 - \kappa^2}$ oraz v_{ef} . Różne mody mają więc różne efektywne współczynniki załamania i prędkości rozchodzenia się.
3. W przykładzie z Rys. 5 rozchodzą się dwa mody parzyste i dwa nieparzyste. Jak widać z rysunku, zmniejszenie d na przykład dwukrotnie spowoduje, że ćwiartka okręgu będzie miała promień o połowę mniejszy i dozwolone będą tylko 2 mody. Zmniejszając d redukujejmy (odcinamy) ilość modów.
4. Jeżeli d jest dostatecznie małe, to światłowodzie rozchodzi się tylko jeden mod: *mod parzysty rzędu 0*. Światłowód taki nazywamy **jednomodowym**. Nie można odciąć modu zerowego TE.
5. Nierówność, która musi być spełniona, aby rozchodził się mod danego rzędu m nazywamy **warunkiem odcięcia** dla tego modu:

$$\frac{d}{2} k_0 \sqrt{n_r^2 - n_p^2} > m \frac{\pi}{2} .$$

D. Zagadnienia dodatkowe

Na podstawie podanej poniżej literatury należy opanować podstawy poniższych zagadnień:

1. Półprzewodnikowe emitery światła (DEL i lasery)
2. Fotodetektory półprzewodnikowe (fotodiody PIN i lawinowe)

III.

Literatura

1. A. Smoliński "Światłowody oraz ich zastosowanie"
2. A. Pawlaczyk, "Elementy i układy optoelektroniczne"
3. B. Crosigiani, G. de Marchis, A. Tadeusiak "Światłowody w telekomunikacji"
4. B. Ziętek "Światłowody"