Instytut Fizyki

Uniwersytet Mikołaja Kopernika

Piotr Targowski i Bernard Ziętek

Pracownia Optoelektroniki

WYZNACZANIE MACIERZY [ABCD] UKŁADU OPTYCZNEGO

BADANIE WIĄZKI GAUSSOWSKIEJ

Zadanie VII

Zakład Optoelektroniki

Toruń 2004

WYZNACZANIE MACIERZY [ABCD] UKŁADU OPTYCZNEGO

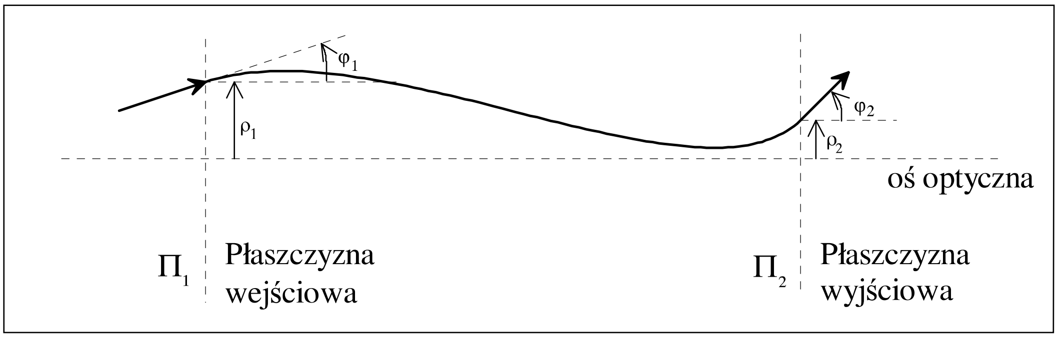
I. Cel zadania

Celem zadania jest praktyczne opanowanie metody macierzowej opisu układu optycznego.

II. Optyka macierzowa

A. Podstawowe zależności

Optyka macierzowa opisuje odwzorowania kolinearne (płaszczyzny odwzorowują się w płaszczyzny) oraz centrowane (punktom przedmiotowym leżącym na pewnej wybranej prostej (*osi optycznej*) odpowiadają punkty obrazowe leżące na tej samej prostej oraz istnieje symetria obrotowa wokół tej osi).
Podstawowe zagadnienie optyki promieni polega na wyznaczeniu własności promienia wychodzącego z układu (ρ_2 i φ_2 na rys. 1) na podstawie znajomości własności promienia wchodzącego (ρ_1 i φ_1) oraz własności układu.



Rys.1. Pomiędzy płaszczyznami Π_1 i Π_2 znajduje się układ optyczny przekształcający promień

Optyka promieni przyosiowych bada przekształcenia promieni tworzących mały kąt z osią optyczną, wówczas

$$\varphi = \sin(\varphi) = tg(\varphi) \tag{1}$$

Odwzorowania kolinearne, centrowane odpowiadają przekształceniu liniowemu parametrów promienia

$$\rho_2 = a\rho_1 + b\varphi_1 \tag{2a}$$
$$\varphi_2 = c\rho_1 + d\varphi_1 \tag{2b}$$

Współczynnik załamania ośrodka przed płaszczyzną wejściową oraz za płaszczyzną wyjściową uwzględnia się zastępując kąt φ przez kąt uogólniony v

$$v = n\varphi \tag{3}$$

Wówczas odwzorowanie promienia (2) zapisuje się w postaci

$$\rho_2 = A\rho_1 + Bv_1 \tag{4a}$$
$$v_2 = C\rho_1 + Dv_1 \tag{4b}$$

albo w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} \rho_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ v_1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Dla dowolnego układu optycznego wyznacznik macierzy [ABCD] jest równy 1

$$AD - BC = 1 \tag{6}$$

B. Postać macierzy [ABCD] dla prostych układów optycznych

Wartość współczynników macierzy ABCD zależy od własności układu optycznego i położenia płaszczyzn Π_1 i Π_2.
Dla standartowych elementów układów optycznych macierz ta ma postać:

- płaszczyzna S stanowi granicę ośrodków o różnych współczynnikach załamania, przy czym $S = \Pi_1 = \Pi_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

- dielektryk o współczynniku załamania n i grubości d pomiędzy płaszczyznami Π_1 i Π_2

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

- pojedyncza sferyczna powierzchnia łamiąca o promieniu r (r > 0 jeżeli środek krzywizny leży po stronie ośrodka 2). Płaszczyzny $\Pi_1 = \Pi_2$ przecinają oś optyczna razem z powierzchnia łamiącą

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_2 - n_1}{r} & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

- soczewka cienka o ogniskowej f (f > 0 dla soczewki skupiającej). Płaszczyzny $\Pi_1 = \Pi_2$ przecinają oś optyczna razem z soczewka cienką

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Złożony układ optyczny można skonstruować z elementów opisanych powyżej. Jeżeli promień światła kolejno przechodzi przez elementy 1,2..*k* to własności promienia wyjściowego można obliczyć ze wzoru

$$\begin{bmatrix} \rho_k \\ v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix} \cdots\cdots \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ v_1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

gdzie macierz [ABCD] opisuje cały układ optyczny zawarty pomiędzy płaszczyznami Π_1 i Π_k.

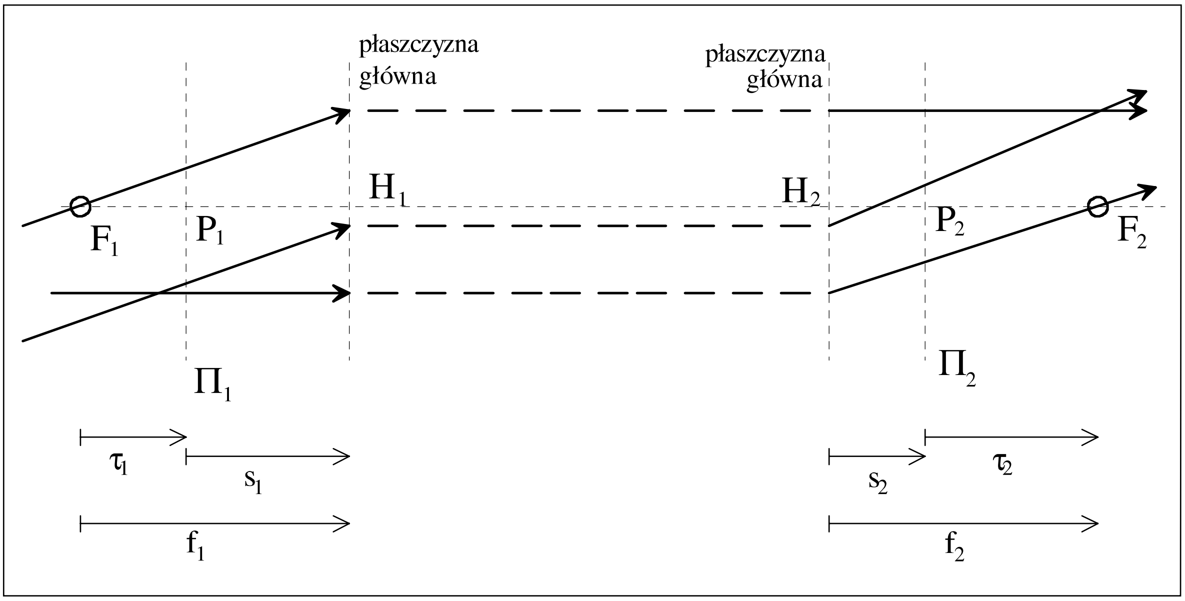
C. Punkty kardynalne układu optycznego

Układ optyczny można również opisać za pomocą 4 płaszczyzn: 2 płaszczyzn ogniskowych i 2 płaszczyzn głównych (czasami definiuje się też płaszczyzny węzłowe - tutaj pomijane).

- **Płaszczyznę ogniskową** tworzy odwzorowanie wiązki równoległych promieni. **Punkt ogniskowy (F)** jest obrazem równoległej do osi optycznej wiązki równoległych promieni i leży na przecięciu płaszczyzny ogniskowej (prostopadłej do osi optycznej) i osi opty- cznej.
- **Płaszczyzny główne** są prostopadłe do osi optycznej i odwzorowują się na siebie w stosunku 1:1. **Punkty główne (H)** leżą na przecięciu płaszczyzn głównych z osią optyczną.
- Punkty F i H należą do **punktów kardynalnych** odwzorowania.
- **Ogniskowymi** układu optycznego są odległości ognisk do płaszczyzn głównych.

Przyjmijmy następujące oznaczenia i umowę co do znaków odległości w układzie optycznym:

- ogniskowe: $f_1 = \overrightarrow{F_1 H_1} \quad f_2 = \overrightarrow{H_2 F_2}$
- położenie płaszczyzn głównych: $s_1 = \overrightarrow{\Pi_1 H_1} \quad s_2 = \overrightarrow{H_2 \Pi_2}$
- położenie ognisk: $\tau_1 = \overrightarrow{F_1 \Pi_1} \quad \tau_2 = \overrightarrow{\Pi_2 F_2}$



Rys.2. Przykładowe rozmieszczenie podstawowych punktów odwzorowania. Dla takiego układu płaszczyzn wszystkie odległości są dodatnie

Korzystając z rys. 2 łatwo można wyznaczyć związki pomiędzy położeniem punktów kardynalnych a współczynnikami [ABCD]

$$s_1 = n_1 \frac{D-1}{C} \quad \tau_1 = -n_1 \frac{D}{C} \quad f_1 = \tau_1 + s_1 = -n_1 \frac{1}{C}$$

oraz (12)

$$s_2 = n_2 \frac{A-1}{C} \quad \tau_2 = -n_2 \frac{A}{C} \quad f_2 = \tau_2 + s_2 = -n_2 \frac{1}{C}$$

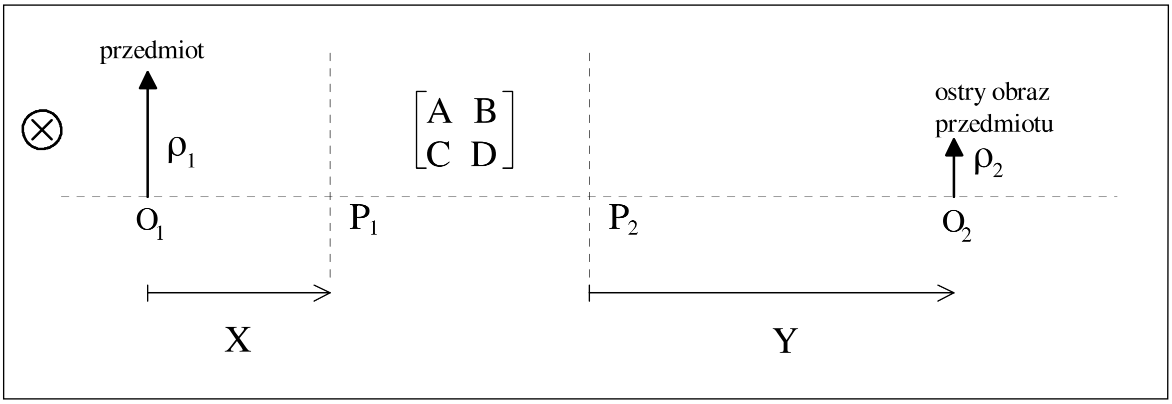
D. Przypadki szczególne

Szczególne znaczenie mają tak rozmieszczone płaszczyzny Π_1 i Π_2, że pewne elementy macierzy [ABCD] się zerują:

- *A = 0* oznacza, że płaszczyzna Π_2 jest drugą płaszczyzną ogniskową
- *B = 0* oznacza, że płaszczyzna Π_2 jest obrazem płaszczyzny Π_1 (przedmiotowej). Inaczej mówiąc przedmiot umieszczony w płaszczyźnie Π_1 ma ostry obraz w płaszczyźnie Π_2. *A* jest powiększeniem liniowym układu.
- *C = 0* oznacza, że układ przekształca wiązkę równoległą na wiązkę równoległą. Taki układ nazywamy afokalnym lub teleskopowym, *D* jest powiększeniem kątowym tego układu.
- *D = 0* oznacza, że płaszczyzna Π_1 jest pierwszą płaszczyzną ogniskową.

III. Metoda wyznaczenia współczynników [ABCD] układu optycznego

Układ pomiarowy przedstawia rys. 3. Pomiędzy punktami P_1 i P_2 znajduje się układ optyczny, którego macierz wyznaczamy. Przedmiot o znanych rozmiarach umieszczony jest w punkcie O_1. Ekran z ostrym obrazem przedmiotu znajduje się w punkcie O_2.



Rys.3. Zasada pomiaru współczynników [ABCD] nieznanego układu optycznego

Ponieważ układ pomiarowy znajduje się w powietrzu, współczynniki załamania w obszarach X i Y możemy przyjąć jako równe 1. W takim przypadku macierz [ABCD] całego układu (od przedmiotu do obrazu) można wyrazić wzorem

$$M = \begin{bmatrix} 1 & Y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+YC & AX+B+Y(D+XC) \\ C & D+XC \end{bmatrix} \tag{13}$$

Jeżeli obraz jest ostry, to $M_{12}= 0$, czyli

$$A\,X + B + Y(D + X\,C) = 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1}{\alpha} = A + Y\,C \tag{14}$$

gdzie $1/\alpha$ jest powiększeniem kątowym. Obliczając w tym przypadku wyznacznik macierzy z prawej strony wzoru (13), uwzględniając (13) i wzór (6) otrzymujemy

$$(A + Y\,C)(D + X\,C) - 0\,C = 1 \tag{15}$$

i dalej

$$D + X\,C = \frac{1}{A + Y\,C} = \alpha \quad \text{oraz} \quad A\,X + B = -Y(D + X\,C) = -Y\alpha \tag{16}$$

Pomiar polega na wyznaczeniu $\alpha(X)$ i $Y(X)$ dla szeregu wartości X.

IV. Literatura

1. B. Ziętek, Optoelektronika, Wyd. UMK, Toruń, 2004.

V. Aparatura

Układ pomiarowy zestawiony jest na ławie optycznej wyposażonej w podziałkę i składa się z:

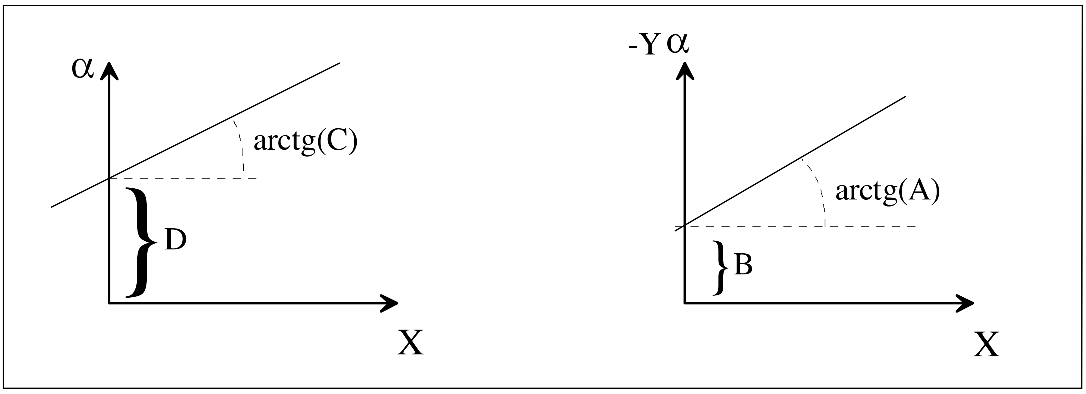
1. Źródła światła z żarówką halogenową i zasilaczem Z 3020 (napięcie pracy żarówki = = 12V)
2. Matówki z krzyżem - "przedmiotu" o wysokości 10.6 mm
3. Nieznanego układu optycznego - zestawu soczewek ustawionych przez opiekuna zadania
4. Ekranu z tłem z papieru milimetrowego

Obiekty 2 - 4 ustawione są na koniach ze wskaźnikami.

VI. Wykonanie zadania

W celu wykonania zadania należy kolejno:

1. Obrać położenie płaszczyzn wejściowej i wyjściowej tak, by badany układ optyczny znajdował się pomiędzy nimi.
2. Dla pewnego położenia przedmiotu (odczytać i zapisać wartość X) znaleźć 10-cio krotnie położenie ekranu dające ostry obraz. Wyznaczyć średnie wartości Y i α oraz ich odchylenia standartowe.
3. Powtórzyć czynności z punktu 2 dla kolejnych położeń przedmiotu z możliwie szerokiego przedziału. Położenie źródła światła zmieniać tak, by zawsze mieć maksymalnie jasny obraz.
4. Sporządzić wykresy $\alpha(X)$ i $-Y(X)*\alpha(X)$ - (patrz rys.4).
5. Metodą regresji liniowej wyznaczyć współczynniki [ABCD] oraz błędy ich wyznaczenia
6. Obliczyć wartość wyznacznika macierzy [ABCD] i błąd jego wyznaczenia.
7. Obliczyć położenia ognisk i płaszczyzn głównych.
8. Na papierze milimetrowym wykreślić elementy układu zaznaczając położenia punktów P_1 i P_2 oraz punktów kardynalnych.



Rys.4. Metoda wyznaczenia współczynników [ABCD]

BADANIE WIĄZKI GAUSSOWSKIEJ

I. Cel zadania

Celem zadania jest poznanie podstawowych własności wiązki gaussowskiej.

II. Podstawowe definicje i wzory

A. Definicja wiązki gaussowskiej

Każda fala elektromagnetyczna rozchodząca się w ośrodku (o współczynniku załamania *n*) musi spełniać równanie falowe

$$\nabla^2 \mathbf{E}(x,y,z,t) - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}(x,y,z,t)}{\partial t^2} = 0 \ . \qquad (1)$$

Najprostszym rozwiązaniem tego równania jest fala płaska. Jeżeli dodatkowo układ współrzędnych zostanie tak zorientowany, by kierunek propagacji fali był zgodny z kierunkiem osi z to falę taką można opisać wzorem

$$\mathbf{E}(z,t) = E_0 e^{-ikz} \cdot e^{i\omega t} \ . \qquad (2)$$

Należy zauważyć, że pole w tym przypadku nie zależy od x i y, a więc jest nieograniczone w przestrzeni. Jednakże, na przykład energia wiązki lasera z pewnością jest skupiona w przestrzeni wokół kierunku propagacji. Dlatego ważną klasą rozwiązań równania (1) są fale "nieco" odbiegające od płaskiej i ograniczone w przestrzeni. Poszukuje się więc rozwiązań w postaci

$$\mathbf{E}(x,y,z,t) = E_0 \Psi(x,y,z) \cdot e^{-ikz} \cdot e^{i\omega t} \ , \qquad (3)$$

gdzie niezależną od czasu modyfikację fali płaskiej opisuje funkcja Ψ(x,y,z).

Podstawiając funkcję (3) do (1) otrzymuje się ścisłe równanie na funkcję zespoloną Ψ:

$$\nabla_t^2 \Psi - i\,2\,k \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0, \qquad (4)$$

gdzie: ∇_t oznacza gradient w kierunku prostopadłym do z.

Ponieważ można założyć, że Ψ jest wolno zmienną funkcją z, trzeci człon w równaniu (4) można pominąć wobec pierwszego.

W laserze, będącym źródłem światła w zadaniu, rura wyładowcza oraz zwierciadła mają symetrię cylindryczną. Powoduje to, że również pole ma symetrię cylindryczną. Wówczas gradient ∇_t przyjmuje postać

$$\nabla_t^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right); \qquad r = \sqrt{x^2+y^2} \ . \qquad (5)$$

Wówczas najprostszym rozwiązaniem równania (4) jest funkcja

$$\Psi(r,z) = \frac{w_0}{w(z)} \exp[-ik(\frac{r^2}{2\,\mathbf{q}(z)} - arc\tan\frac{z}{z_0})] \ , \qquad (6)$$

gdzie: w_0 i z_0 są stałymi rzeczywistymi charakteryzującymi wiązkę, a funkcje rzeczywiste *w(z), R(z)* i zespolona ***q****(z)* są następujące

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + (\frac{z}{z_0})^2} \qquad (7)$$

$$R(z) = z\,[1 + (\frac{z_0}{z})^2] \qquad (8)$$

$$\mathbf{q}(z) = z + i z_0 \qquad \text{albo:} \qquad \frac{1}{\mathbf{q}(z)} = \frac{1}{R(z)} - i\frac{w_0^2}{w(z)^2}\ . \tag{9}$$

Wstawiając funkcję (6) do (3) kompletne rozwiązanie równania (1) można zapisać w postaci:

$$\mathbf{E}(r,z,t) = E_0 \frac{w_0}{w(z)} \exp[-\frac{r^2}{w(z)^2}] \cdot \exp[-i(kz - k\frac{r^2}{2R(z)} + \arctan(\frac{z}{z_0}) + \omega t)] \tag{10}$$

<--- amplituda ---> <------------- faza ---------------->

Tak więc:

- w(z) oznacza odległość od osi optycznej, dla której amplituda fali maleje e razy:

$$\mathbf{E}(w(z), z, t) = \frac{1}{e}\mathbf{E}(0, z, t).$$

W obszarze o promieniu *w(z)* koncentruje się 95.5% energii wiązki

- minimalna wartość w(z) przypadająca dla z=0 nazywa się *przewężeniem wiązki* w_0,
- *R(z)* jest *promieniem krzywizny frontu falowego* przecinającego oś optyczną w odległości *z* od przewężenia
- z_0 jest odległością od przewężenia, dla której w(z) rośnie $\sqrt{2}$ razy:

$$w(z_0) = w_0 \cdot \sqrt{2}$$

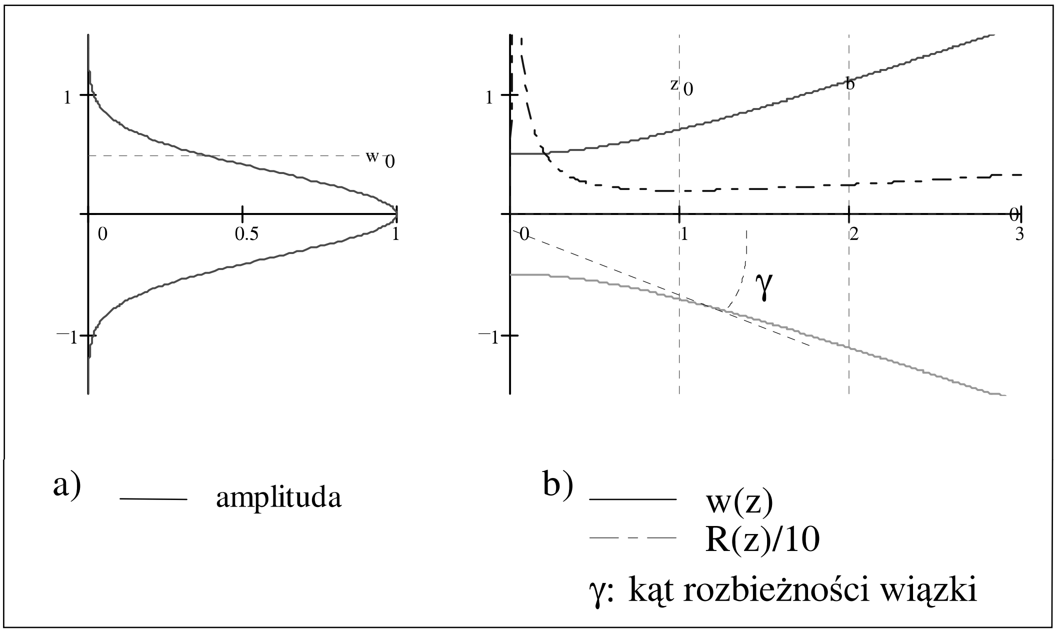
- dodatkowo definiuje się *parametr konfokalny* $b = 2z_0$
- *długość wektora falowego k* jest związana z *częstością kołową drgań pola* ω jak dla fali płaskiej: $k = \omega / c$.

Związki pomiędzy parametrami wiązki gaussowskiej

część urojona parametru Kogelnika **q**(z)	z_0	$= \frac{\pi n}{\lambda_0} w_0^2$	$= \frac{k}{2} w_0^2$	$= \frac{b}{2}$
przewężenie wiązki	w_0	$= \sqrt{\frac{\lambda_0 z_0}{\pi n}}$	$= \sqrt{\frac{2z_0}{k}}$	$= \sqrt{\frac{b}{k}}$
parametr konfokalny	b	$= \frac{2\pi n}{\lambda_0} w_0^2$	$= k w_0^2$	$= 2z_0$
wektor falowy w ośrodku	k	$= \frac{2\pi}{\lambda_0} n$	$= 2\frac{z_0}{w_0^2}$	$= \frac{b}{w_0^2}$
długość fali w próżni	λ_0	$= \frac{2\pi}{k} n$	$= \pi n \frac{w_0^2}{z_0}$	$= 2\pi n \frac{w_0^2}{b}$

B. Rozkład amplitudy we wiązce gaussowskiej

Na Rys. 1a przedstawiono rozkład amplitudy pola elektrycznego we wiązce w płaszczyźnie prostopadłej do osi optycznej i dla $z = 0$, na rys. 1b wartości funkcji *w(z)* albo inaczej odległość od osi optycznej dla której amplituda pola maleje *e* razy.



Rys.1. Wiązka gaussowska, $w_0 = 0.5$, $z_0 = 1$, $E_0 = 1$

<u>Uwaga</u>: dla przejrzystości wykreślono wiązkę z λ_0=1.57 jednostki długości i w_0=0.5 tej samej jednostki. Odpowiada to wartości wektora falowego k = 4. Fala elektromagnetyczna z zakresu rozważanego w optyce ma k rzędu 10^7 m^{-1} i wiązki są bardziej "smukłe".

Jak wynika z rysunku wiązka gaussowska charakteryzuje się więc pewną rozbieżnością, którą można opisać **kątem rozbieżności** γ. Kąt ten (wyrażany w mierze łukowej) zawarty jest pomiędzy kierunkiem w którym w danej odległości amplituda maleje *e* razy i osią optyczną. Innymi słowy: kątowe rozmiary plamki światła za ekranie w odległości *z* można z dobrym przybliżeniem określić na $2 \cdot \gamma$. Kąt γ jest równy

$$\gamma(z) = \arctan\left(\frac{w(z)}{z}\right) = \arctan\left(\frac{w_0}{z_0}\sqrt{1+\left(\frac{z_0}{z}\right)^2}\right). \tag{11}$$

C. Rozkład amplitudy we wiązce gaussowskiej w strefie dalekiej

Dla odległości *z* znacznie większych od z_0 funkcję w(z) (7) można przedstawić w postaci przybliżonej: $w(z) = w_0\frac{z}{z_0}$. W takim przypadku kąt rozbieżności γ (11) nie zależy od *z* (od odległości od przewężenia) i wynosi

$$\tan(\gamma) = \frac{w(z)}{z} = \frac{w_0}{z_0} = \frac{2}{k w_0} = \frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{w_0}. \tag{12}$$

D. Mody wyższych rzędów

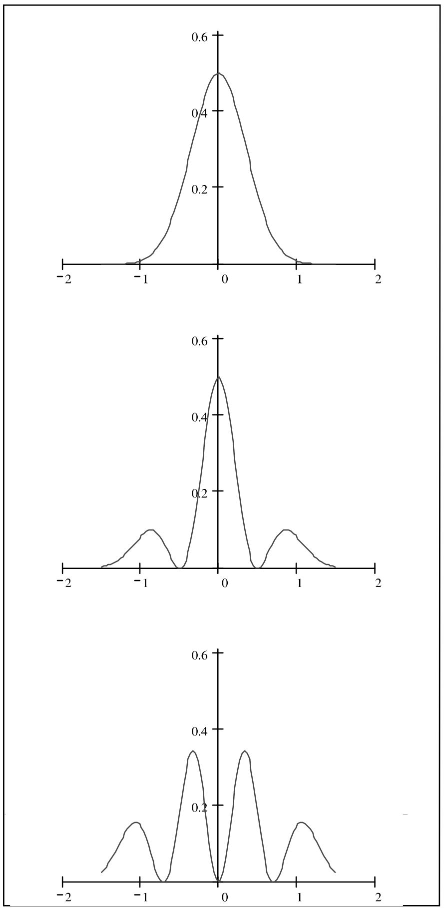
Funkcja (10) jest najprostszym (ale nie jedynym) rozwiązaniem równania (1) dla fali typu (3) z symetrią cylindryczną. W ogólności pole we wnęce opisywane jest funkcją

$$E(r,\phi,z) = E_0(\sqrt{2}\,\tfrac{r}{w(z)})^m\, L_n^m(2\tfrac{r^2}{w(z)^2})\, \exp(-im\phi)\, \tfrac{w_0}{w(z)}\, \exp(-\tfrac{r^2}{w(z)^2})\, \exp[-i(kz+\tfrac{kr^2}{2R(z)} - (2n+m+1)\arctan(\tfrac{z}{z_0}))] \quad (13)$$

gdzie: $L_n^m(x)$ są uogólnionymi wielomianami Laguerre'a

$$L_0^m(x) = 1\,, \qquad L_1^m(x) = m+1-x\ , \qquad L_2^m(x) = \tfrac{1}{2}(m+1)(m+2)-(m+2)x+\tfrac{1}{2}x^2\ .$$

Oczywiście funkcja (13) sprowadzi się do (10) dla $m = 0$ i $n = 0$. Indeksów m i n używa się do oznaczenia modów wiązki: mod podstawowy (10) oznacza się TEM_{00}.
Na rys. 2 przedstawiono poprzeczny rozkład natężenia oświetlenia (E^2) dla kilku modów najniższych rzędów.



Rys.2. Poprzeczny (wzdłuż osi x, dla y = 0, z = 1) rozkład natężenia E^2 dla modów TEM_{00}, TEM_{10} i TEM_{11} (symetrii cylindrycznej) wiązki gaussowskiej o parametrach z rys.1

Należy zauważyć, że jakkolwiek wszystkie mody z rys. 2 opisane są tym samym w_0, to dla wyższych modów energia jest mniej skupiona wzdłuż kierunku propagacji. Zazwyczaj laser emitujący wiązkę wielomodową pracuje w kilku modach równocześnie (na przykład 00, 01, 11 i 10) i w rezultacie obserwuje się *sumę* natężeń z rys. 2. W konsekwencji laser pracujący wyłącznie w modzie 00 zapewnia największą koncentrację energii.

E. Transformacja wiązki gaussowskiej przez układ optyczny

Do opisu transformacji wiązki gaussowskiej zostanie zastosowany formalizm optyki macierzowej. Zgodnie z *twierdzeniem ABCD* wiązka gaussowska o zespolonym parametrze Kogelnika ***q**(z)* przechodząc przez układ optyczny opisany macierzą [ABCD] przekształca się na wiązkę o parametrze $\boldsymbol{q_1}(z)$ danym wzorem:

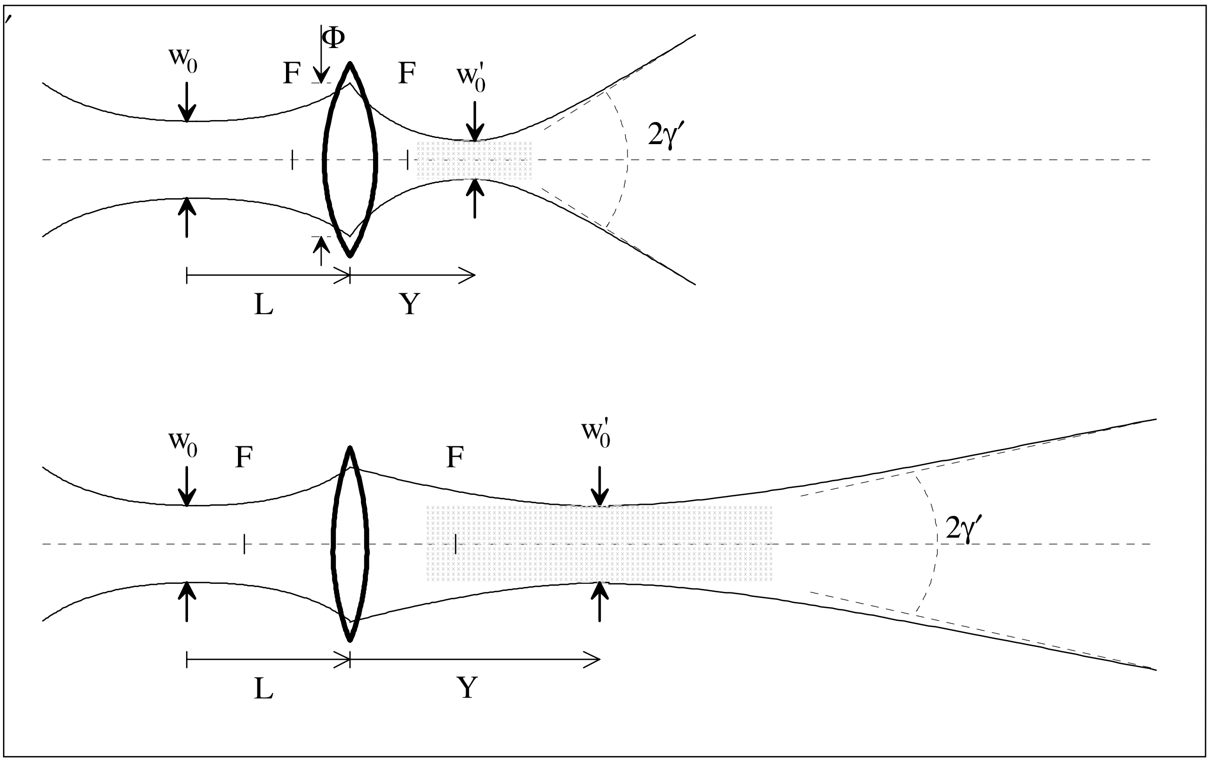
$$q_1(z) = \frac{A \cdot q(z) + B}{C \cdot q(z) + D}. \tag{14}$$

Tak więc, aby uzyskać wartość parametru Kogelnika w odległości y za soczewką cienką o ogniskowej f umieszczoną w odległości L od przewężenia wiązki, do wzoru (14) należy podstawić macierz o współczynnikach

$$\begin{bmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f-y}{f} & y \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

oraz parametr Kogelnika ***q**(L)*.
Tak więc nowy parametr Kogelnika w odległości y od soczewki będzie wyrażał się wzorem

$$q_1(y) = \frac{\frac{f-y}{f} \cdot (L + i \cdot z_0) + y}{-\frac{1}{f} \cdot (L + i \cdot z_0) + 1} \tag{16}$$



Rys.3. Transformacja wiązki gaussowskiej przez soczewki o różnych ogniskowych. W obszarze zakreskowanym gęstość mocy spada nie więcej niż o połowę

Na podstawie zależności (9) można obliczyć *w(y)* i *R(y)* dla nowej wiązki. Położenie *Y* i wartość nowego przewężenia można wyznaczyć z warunku: $R(D)=\infty$. Po prostych przekształceniach otrzymuje się:

3. Zweryfikować hipotezę o gaussowskim rozkładzie natężenia dopasowując do uzyskanych danych funkcję

$$I(\alpha) = I_{tla} + I_{\max} * \exp\left[-\frac{(\alpha-\alpha_0)^2}{d^2} \right]. \tag{21}$$

4. Na podstawie dopasowanego parametru d (w radianach) obliczyć wartość funkcji $w\ (z=L)$ w miejscu detektora porównując wzór (21) ze wzorem (10) pamiętając, że natężenie promieniowania I jest proporcjonalne do kwadratu amplitudy pola E

$$I(\alpha) \sim \exp\left[-\frac{(\alpha-\alpha_0)^2}{d^2} \right] \propto [E(r,L)]^2 \sim \left[\exp\left[\frac{r^2}{w(L)^2} \right] \right]^2.$$

Ponieważ kąty w obrębie wiązki są małe, odległość r od osi optycznej można zastąpić kątem α: $r = \alpha \cdot L$. Po podstawieniu i wykorzystaniu wzoru (12) uzyskuje się

$$d = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{w(L)}{L} = \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma.$$

Zakładając, że przewężenie wiązki leży w połowie długości rezonatora lasera wyznaczyć wartość parametru w_0 ze wzoru (12) oraz korzystając z zestawionych w tabeli związków pomiędzy parametrami obliczyć z_0 i b dla tej wiązki wiedząc, że długość fali promieniowania lasera He-Ne wynosi λ_0= 632.8 nm.

C. Zaprojektowanie układu optycznego o zadanych parametrach

1. Zdemontować przesłonę z miernika mocy lasera KB 6301. Zmierzyć całkowitą moc wiązki laserowej.
2. W oparciu o wzory (19) zaproponować układ optyczny (określić L, f oraz Φ) skupiający wiązkę lasera do plamki o gęstości mocy = 1000 W/cm^2.
   Obliczyć DOF i rozbieżność wiązki.