

# Autoreferat

## 1 Imię i Nazwisko

Adam Sawicki

## 2 Posiadane dyplomy, stopnie naukowe/artystyczne z podaniem nazwy, miejsca i roku ich uzyskania oraz tytułu rozprawy doktorskiej.

23.09.2014 - Doktora Nauk Matematycznych, Uniwersytet w Bristolu, Wielka Brytania.

**Tytuł rozprawy:** Topology of graph configuration spaces and quantum statistics.

**Promotor:** Prof. Jonathan P. Keating, Prof. Jonathan M. Robbins.

14.11.2011 - Doktora Nauk Fizycznych, Uniwersytet Warszawski, Warszawa.

**Tytuł rozprawy:** Geometria symplektyczna splątania kwantowego.

**Promotor:** Prof. dr hab. Marek Kuś.

26.02.2010 - Magistra Fizyki Teoretycznej (z wyróżnieniem), Uniwersytet Warszawski, Warszawa.

**Tytuł pracy:** Klasyczna niecałkowalność kwantowo chaotycznego układu hamiltonowskiego z symetrią grupy  $SU(3)$ .

**Promotor:** Prof. dr hab. Marek Kuś, Prof. dr hab. Iwo Białynicki-Birula.

## 3 Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych/artystycznych.

1. 10/2016-.... Adiunkt (w ramach dotacji MNiSW), Centrum Fizyki Teoretycznej Polskiej Akademii Nauk, Warszawa.
2. 10/2015-10/2016 - Marie Curie Research Fellow, School of Mathematics, University of Bristol, Bristol, UK

3. 10/2013-10/2015 - Marie Curie Research Fellow, **Centre for Theoretical Physics, Massachusetts Institute of Technology**, Cambridge, USA
4. 10/2013-10/2016 - Adiunkt, **Centrum Fizyki Teoretycznej Polskiej Akademii Nauk**, Warszawa (urlop bezpłatny)
5. 10/2010-10/2013 - PhD student, **School of Mathematics, University of Bristol**, Bristol, UK
6. 03/2010-10/2013 - Asystent naukowy, **Centrum Fizyki Teoretycznej Polskiej Akademii Nauk**, Warszawa (w okresie 11/2011-10/2013 urlop bezpłatny).
7. 03/2008-03/2010 - Stażysta, **Centrum Fizyki Teoretycznej Polskiej Akademii Nauk**, Warszawa.

**4 Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.)**

**(a) tytuł osiągnięcia naukowego/artystycznego**

*Odwzorowania momentu w teorii korelacji kwantowych.*

**(b) (autor/autorzy, tytuł/tytuły publikacji, rok wydania, nazwa wydawnictwa, recenzenci wydawniczy),**

1. Maciążek T., Sawicki A., 2015 Critical points of the linear entropy for pure L-qubit states J. Phys. A: Math. Theor. 48 045305
2. Oszmaniec M., Suwara P., Sawicki A., 2014, Geometry and topology of CC and CQ states, J. Math. Phys. 55, 06220
3. Sawicki A., Oszmaniec M., Kuś M., 2014, Convexity of momentum map, Morse index, and quantum entanglement, Reviews in Mathematical Physics, 26, 1450004
4. Maciążek T., Oszmaniec M., Sawicki A., 2013, How many invariant polynomials are needed to decide local unitary equivalence of qubit states?, J. Math. Phys. 54, 092201
5. Sawicki A., Tsanov V. V., 2013, A link between quantum entanglement, secant varieties and sphericity, J. Phys. A: Math. Theor. 46 265301
6. Huckleberry A., Kuś M., Sawicki A., 2013, Bipartite entanglement, spherical actions and geometry of local unitary orbits, J. Math. Phys. 54, 022202

### (c) omówienie celu naukowego/artystycznego ww. pracy/prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania.

Struktura autoreferatu jest następująca. W rozdziale 4.1 znajduje się wprowadzenie w tematykę badań cyklu publikacji [1-6] oraz przedstawione są krótko ich główne rezultaty. W rozdziale 4.2 omawiamy odwzorowanie momentu w kontekście teorii korelacji kwantowych. Rozdział ten jest punktem wyjścia dla dalszych rozważań. W rozdziałach 4.3, 4.4 i 4.5 przedstawiona jest bardziej szczegółowa dyskusja rezultatów cyklu publikacji [1-6]. Krótkie omówienie pozostałych osiągnięć badawczych znajduje się w rozdziale 5.

## 4.1 Wprowadzenie

Typowy układ kwantowy ma nieskończenie wymiarową przestrzeń Hilberta. Przykładem może być chociażby oscylator harmoniczny, czy też atom wodoru mający nieskończenie wiele poziomów energetycznych. Niemniej jednak, w wielu sytuacjach fizycznych układy takie traktujemy jako skończenie wymiarowe, bowiem przykładowo, ze względu na istnienie sprzężenia z polem elektromagnetycznym o określonym widmie częstotliwościowym, tylko kilka modów/stanów rozważanego układu jest istotnych. Przestrzeń Hilberta takiego skończenie wymiarowego układu oznaczają będziemy przez  $\mathcal{H}$ . Pomimo znacznego zainteresowania w ostatnich latach, zrozumienie korelacji w wielocząstkowych skończenie wymiarowych układach kwantowych jest wciąż niepełne. Naturalnymi metodami analizy układów tego typu są metody zespolonej algebry liniowej. Metody te pozwalają odpowiedzieć na wiele interesujących pytań dotyczących własności korelacji kwantowych [33, 55]. Nie dają one jednak głębszego wglądu w geometryczną strukturę przestrzeni stanów, której istnienie umożliwia wykorzystanie rozwiniętych ostatnio zaawansowanych metod zespolonej geometrii algebraicznej i symplektycznej. Cykl przedstawionych tu prac jest rezultatem programu badawczego, którego celem było uzupełnienie tej luki i zastosowanie wspomnianych metod w kontekście korelacji kwantowych.

Jednym z podstawowych problemów teorii korelacji kwantowych jest klasyfikacja stanów ze względu na operacje lokalne wykonywane niezależnie na podukładach danego układu. Wyróżnia się dwie główne klasy takich operacji: (1) lokalne unitarne - dalej zwane LU, (2) SLOCC - Stochastic Local Operations with Classical Communication. Matematycznie, operacje te odpowiadają działaniu na przestrzeni stanów pewnej grupy zwartej  $K \subset SU(\mathcal{H})$  w przypadku (1) i jej kompleksyfikacji  $G = K^{\mathbb{C}}$  w przypadku (2). Przestrzeń stanów czystych układu (przy pominięciu globalnej fazy) jest przestrzenią rzutową  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ , zaś dla stanów mieszanych, przestrzeń izospektralnych macierzy gęstości jest orbitą dołączoną działania grupy unitarnej  $SU(\mathcal{H})$ . Kluczowym faktem jest to, że w obu wypadkach przestrzenie te posiadają naturalną strukturę geometryczną Kählera, a więc w szczególności strukturę rozmaitości symplektycznej. Ponadto, działanie grupy zwartej  $K$  zachowuje strukturę symplektyczną, czego rezultatem jest istnienie *odwzorowania momentu*. Odwzorowanie to, w rozważanych tu przypadkach, przyporządkowuje (z dokładnością do nieistotnych stałych) stanom układu  $L$  cząstek ich zredukowane jednoczątkowe macierze gęstości, a więc jest tożsame z operacją częściowego śladu po  $L - 1$  podukładach. Utożsamienie to otwiera nowe możliwości analizy bowiem udostępnia dobrze rozwinięty aparat geometrii algebraicznej i symplektycznej w

kontekście problemów, które dotyczą jednocząstkowych macierzy gęstości. Wykorzystując ten aparat w cyklu prac [1-6] opublikowanych wraz z moimi współpracownikami:

- Pokazuję, kiedy informacja zawarta w jednocząstkowych macierzach gęstości jest wystarczająca dla rozwiązania problemu LU-równoważności i podaje pełną charakteryzację geometrycznej struktury zbiorów stanów LU-równoważnych [6].
- Wykazuję, że istnienie tzw. stanów wyjątkowych jest przeszkodą dla rozwiązania problemu LU-równoważności przy użyciu wyłącznie zredukowanych jednocząstkowych macierzy gęstości [5].
- Dla układu wielu kubitów pokazuję ile dodatkowych  $K$ -niezmienniczych wielomianów (prócz tych bezpośrednio pochodzących z jednocząstkowych macierzy gęstości) potrzeba do rozwiązania problemu LU-równoważności. Liczba ta zmienia się w zależności od widma zredukowanych macierzy i opisują tę zmienność [4].
- Proponuję nową charakteryzację stanów ze względu na operacje SLOCC, która daje zawsze skończoną liczbę *uogólnionych klas SLOCC*. Przedstawione podejście obejmuje przypadek czystych stanów cząstek rozróżnialnych oraz bozonów i fermionów [3].
- Przedstawiam algorytm znajdowania punktów krytycznych liniowej entropii dla dowolnej liczby kubitów [1]. Algorytm ten usprawnia w znaczący sposób metodę zaproponowaną w [3].
- Podaję geometryczną i topologiczną charakteryzację stanów mieszanych dwóch cząstek rozróżnialnych o zerowym dyskordzie, dokładniej - stanów  $CC$  i  $CQ$ . Zbiory tych stanów stanowią domknięcie zbioru symplektycznych orbit działania odpowiednio  $SU(N_1) \times SU(N_2)$  oraz  $SU(N_1) \times I_{N_2}$ , gdzie  $N_1$  i  $N_2$  to wymiary przestrzeni Hilberta obu cząstek. Ponadto pokazuję, że są to jedyne stany, dla których orbity wspomnianych grup mają nieznikającą charakterystykę Eulera-Poincarégo [2].

## 4.2 Odwzorowanie momentu

### 4.2.1 Ujęcie ogólne

W poniższym rozdziale wprowadzamy i omawiamy odwzorowanie momentu w ujęciu ogólnym [24]. Następnie podajemy jego interpretacje w ujęciu korelacji kwantowych. Jak już wspomnieliśmy we wstępie, odwzorowanie momentu pojawia się, gdy grupa Liego działa na rozmaitości symplektycznej zachowując jej strukturę symplektyczną. W dalszej części pracy  $K$  będzie zawsze spójną półprostą zwartą macierzową grupą Liego działającą w sposób gładki i symplektyczny na rozmaitości symplektycznej  $(M, \omega)$ . Każdemu elementowi algebry Liego  $\xi \in \mathfrak{k} = \text{Lie}(K)$  grupy  $K$  w standardowy sposób przyporządkowane jest fundamentalne pole wektorowe  $\hat{\xi} \in \chi(M)$ . Odwzorowanie  $\hat{\cdot}: (\mathfrak{k}, [\cdot, \cdot]) \rightarrow (\chi(M), [\cdot, \cdot])$  realizujące to przyporządkowanie jest homomorfizmem algebr Liego. Symplektyczność działania grupy  $K$  na rozmaitości  $M$  powoduje, że fundamentalne pola wektorowe są hamiltonowskie. Oznacza to, że gdy rozmaitość  $M$  ma znikającą pierwszą grupę kohomologii de Rhama, dla pola  $\hat{\xi}$  istnieje dobrze określona funkcja  $\mu_\xi$ , taka że  $d\mu_\xi = \omega(\hat{\xi}, \cdot)$ . Funkcje  $\mu_\xi$  można wybrać tak, aby

były liniowe w  $\xi \in \mathfrak{k}$ , zaś dla półprostej grupy  $K$  tak, że odwzorowanie  $\xi \rightarrow \mu_\xi$  jest homomorfizmem algebry  $\mathfrak{k}$  w algebrę  $(C^\infty(M), \{\cdot, \cdot\})$ , gdzie  $\{\cdot, \cdot\}$  jest standardowym nawiasem Poissona indukowanym przez formę symplektyczną  $\omega$ . Przy takich założeniach otrzymujemy również odwzorowanie  $\mu : M \rightarrow \mathfrak{k}^*$ , zdefiniowane przez  $\langle \mu(x), \xi \rangle = \mu_\xi(x)$  nazywane *odwzorowaniem momentu*. Zauważmy, że grupa  $K$  działa również na swojej algebrze Liego  $\mathfrak{k}$  za pomocą działania dołączonego  $\text{Ad}_g \xi = g \xi g^{-1}$ . Działaniem dualnym do działania dołączonego jest działanie kodołączone grupy  $K$  na  $\mathfrak{k}^*$ . Dla półprostej grupy  $K$  odwzorowanie momentu jest współmiennicze, tzn.  $\mu(\Phi_g(x)) = \text{Ad}_g^* \mu(x)$ , dla dowolnego  $x \in M$  i  $g \in K$ . Orbity działania grupy  $K$  na  $M$ , są więc odwzorowywane (przez  $\mu$ ) na orbity działania kodołączonego w  $\mathfrak{k}^*$ . Orbity kodołączone są z kolei rozmaitościami symplektycznymi wyposażonymi w kanoniczną strukturę symplektyczną - tzw. formę Kirillova-Kostanta-Souriau. Ponadto dla zwartych grup  $K$ , orbity kodołączone można utożsamiać z orbitami dołączonymi używając  $K$ -niezmienniczego iloczynu skalarnego na  $\mathfrak{k}$ . W dalszej części pracy będziemy więc traktować  $\mu$  jako odwzorowanie z  $M$  w  $\mathfrak{k}$ .

#### 4.2.2 Odwzorowanie momentu w kwantowych układach wielocząstkowych

W cyklu publikacji [1-6] rozważane są następujące przestrzenie stanów kwantowych  $M$ :

1. Zespolona przestrzeń rzutowa  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ , gdzie:

- (a)  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_L$ ,  $\mathcal{H}_i$  to  $N_i$ -wymiarowa przestrzeń Hilberta  $i$ -tej cząstki - stany czyste  $L$  cząstek rozróżnialnych, z naturalnym działaniem grup  $K = SU(N_1) \times \dots \times SU(N_L)$ ,  $G = K^\mathbb{C} = SL(N_1, \mathbb{C}) \times \dots \times SL(N_L, \mathbb{C})$  i algebrami Liego  $\mathfrak{k} = \mathfrak{su}(N_1) \oplus \dots \oplus \mathfrak{su}(N_L)$ ,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(N_1, \mathbb{C}) \oplus \dots \oplus \mathfrak{sl}(N_L, \mathbb{C})$ .
- (b)  $\mathcal{H} = \text{Sym}^L \mathcal{H}_1$ ,  $\mathcal{H}_1$  to przestrzeń Hilberta pojedynczego bozonu - stany czyste  $L$  bozonów  $d$ -stanowych z diagonalnym działaniem grup  $K = SU(d)$ ,  $G = K^\mathbb{C} = SL(d, \mathbb{C})$  i algebrami Liego  $\mathfrak{k} = \mathfrak{su}(d)$ ,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(d, \mathbb{C})$ .
- (c)  $\mathcal{H} = \bigwedge^L \mathcal{H}_1$ ,  $\mathcal{H}_1$  to przestrzeń Hilberta pojedynczego fermionu - stany czyste  $L$  fermionów  $d$ -stanowych z diagonalnym działaniem grup  $K = SU(d)$ ,  $G = K^\mathbb{C} = SL(d, \mathbb{C})$  i algebrami Liego  $\mathfrak{k} = \mathfrak{su}(d)$ ,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(d, \mathbb{C})$ .

2. Izospektralne macierze gęstości  $\mathcal{O}_\rho$  układu dwóch rozróżnialnych cząstek opisanych przestrzenią Hilberta  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ , z działaniem dołączonym grupy  $K = SU(N_1) \times SU(N_2)$  i algebrą Liego  $\mathfrak{k} = \mathfrak{su}(N_1) \oplus \mathfrak{su}(N_2)$ .

Wszystkie wymienione przestrzenie są rozmaitościami Kählera, a więc w szczególności rozmaitościami symplektycznymi. Wzór na strukturę symplektyczną w punkcie  $[v] \in \mathbb{P}(\mathcal{H})$  lub punkcie  $\sigma \in \mathcal{O}_\rho$  dany jest odpowiednio przez:

$$\omega(\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2) = \frac{-i \langle v | [\xi_1, \xi_2] v \rangle}{2 \langle v | v \rangle}, \quad \omega(\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2) = \frac{-i}{2} \text{Tr}(\sigma[\xi_1, \xi_2]), \quad \xi_i \in \mathfrak{k}, \quad (1)$$

zaś odwzorowania momentu odpowiednio przez  $\mu : \mathbb{P}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathfrak{k}$ :

1. Dla stanów czystych  $L$  cząstek rozróżnialnych:

$$\mu([v]) = \frac{i}{2} \left\{ \rho_1([v]) - \frac{1}{N_1} I_{N_1}, \rho_2([v]) - \frac{1}{N_2} I_{N_2}, \dots, \rho_L([v]) - \frac{1}{N_L} I_{N_L} \right\}, \quad (2)$$

gdzie  $\rho_i([v])$  jest  $i$ -tą zredukowaną jednoczastkową macierzą gęstości, zaś  $I_{N_i}$  operatorem jedności na  $N_i$  wymiarowej przestrzeni.

2. Dla stanów czystych  $L$   $d$ -stanowych bozonów lub fermionów :  $\mu([v]) = \frac{i}{2} (\rho_1([v]) - \frac{1}{d} I)$ ,  $\rho_1([v])$  jest jednobozonową/jednofermionową zredukowaną macierzą gęstości.

### 4.3 $K$ -równoważność stanów kwantowych

Publikacje [4,5,6] dotyczą problemu lokalnej unitarnej równoważności czystych stanów kwantowych. Dwa stany nazywamy lokalnie unitarnie równoważnymi ( $K$ -równoważnymi), jeżeli można je połączyć przez działanie grupy  $K$ . Celem prac [4,5,6] było zbadanie, kiedy problem  $K$ -równoważności można rozwiązać przy użyciu tylko odwzorowania momentu, a w wypadku gdy nie jest to możliwe zidentyfikowanie fizycznej przyczyny niemożności jego rozwiązania i wskazanie jak dużo informacji brakuje do jego rozwiązania. Zauważmy, że we wszystkich rozważanych układach odwzorowanie momentu jest bezpośrednio związane z operacją częściowego śladu i z jednoczastkowymi zredukowanymi macierzami gęstości. Można więc powiedzieć, że publikacje [4,5,6] dotyczą zbadania roli jednoczastkowych macierzy gęstości w problemie  $K$ -równoważności.

Zwartość grupy  $K$  gwarantuje domkniętość  $K$ -orbit. W celu sprawdzenia, czy dwa stany należą do jednej  $K$ -orbity wystarczy więc znaleźć (skończenie generowany [52]) pierścień wielomianów  $K$ -niezmienniczych (wielomianów, które są stałe na  $K$ -orbitach). Przypomnijmy, że grupa  $K$  działa również na swojej algebrze Liego za pomocą działania dołączonego. Istnienie współzmienniczego odwzorowania momentu  $\mu : M \rightarrow \mathfrak{k}$  gwarantuje, że  $K$ -orbity z przestrzeni stanów są odwzorowywane na orbity dołączone w  $\mathfrak{k}$ . Jeżeli zatem  $p : \mathfrak{k} \rightarrow \mathbb{R}$  jest  $\text{Ad}_K$ -niezmienniczym wielomianem na  $\mathfrak{k}$  to złożenie  $p \circ \mu : M \rightarrow \mathbb{R}$  jest  $K$ -niezmienniczym wielomianem na  $M$ .  $\text{Ad}_{\mathfrak{su}(N)}$ -niezmiennicze wielomiany są znane. Są one dane przez  $\{\text{Tr} X^2, \text{Tr} X^3, \dots, \text{Tr} X^N\}$ , gdzie  $X \in \mathfrak{su}(N)$ . Rozważane w pracach [4-6] algebry Liego są albo algebrą  $\mathfrak{su}(d)$  (dla  $d$ -poziomowych bozonów lub fermionów) albo sumą prostą algebr unitarnych  $\mathfrak{k} = \mathfrak{su}(N_1) \oplus \dots \oplus \mathfrak{su}(N_L)$  (dla  $L$  cząstek rozróżnialnych). Łącząc to z faktem, że odwzorowanie momentu jest dane przez zredukowane jednoczastkowe macierze gęstości otrzymujemy, że ślady potęg tych macierzy są wielomianami  $K$ -niezmienniczymi na  $M$ . Jeżeli odwzorowanie momentu ma tę własność, że przeciwobraz każdej orbity dołączonej z  $\mu(M) \subset \mathfrak{k}$  jest dokładnie jedną  $K$ -orbitą z  $M$ , to wielomiany  $K$ -niezmiennicze na  $M$  i  $\text{Ad}_K$ -niezmiennicze na  $\mathfrak{k}$  są powiązane ze sobą bijektywnie przez  $\mu$ . Zauważmy, że dla  $X \in \mathfrak{su}(N)$  wartości tych wielomianów w punkcie  $X$  jednoznacznie determinują widmo macierzy  $X$  (współczynniki wielomianu charakterystycznego  $X$  są określone przez ślady potęg  $X$ ). Dlatego też,  $K$ -równoważność na  $M$  można w tym wypadku rozstrzygnąć również przez porównanie widm zredukowanych jednoczastkowych macierzy gęstości. Typowo jednak wiele  $K$ -orbit jest odwzorowywanych na jedną orbitę dołączoną w  $\mu(M) \subset \mathfrak{k}$ . Oznacza to, że dla dwóch stanów, których odpowiednie zredukowane macierze gęstości mają takie same widma, potrzebujemy dodatkowych  $K$ -niezmienniczych wielomianów, aby rozstrzygnąć  $K$ -równoważność. Wielomiany takie były wyznaczane dla pewnych niskowymiarowych układów

[16, 45, 66, 69]. W pracach [4-6] skupiamy się więc nie na wyznaczeniu  $K$ -niezmienniczych wielomianów, które najczęściej i tak nie mają dobrze określonej interpretacji fizycznej, ale na geometrycznych własnościach rozważanego problemu. W kolejnych podrozdziałach krótko opisujemy, jakie problemy zostały rozwiązane w pracach [4-6].

### 4.3.1 Rola sferyczności w problemie $K$ -równoważności

Jak już wspomnieliśmy, sytuacja gdy zbiór  $K$ -niezmienniczych wielomianów na  $M$  jest dany przez złożenie wielomianów  $\text{Ad}_K$ -niezmienniczych na  $\mathfrak{k}$  z odwzorowaniem momentu  $\mu : M \rightarrow \mathfrak{k}$  występuje wówczas, gdy przeciwobraz każdej orbity dołączonej z  $\mu(M) \subset \mathfrak{k}$  jest dokładnie jedną  $K$ -orbitą z  $M$ . Oznaczmy przez  $\mathcal{F}_x := \mu^{-1}(\mu(x))$  włókno odwzorowania  $\mu$  nad  $\mu(x) \in \mathfrak{k}$ . Umiejscowienie  $\mathcal{F}_x$  względem orbity  $K.x$  jest kluczowe dla wspomnianej wyżej sytuacji. Orbity  $K$  w  $M$  są w odpowiedności 1-1 z orbitami dołączonymi w  $\mu(M)$  wtedy i tylko wtedy, gdy włókna  $\mathcal{F}_x$  są zawarte w orbitach  $K.x$ . Jak łatwo pokazać  $T_x \mathcal{F}_x \subset (T_x K.x)^\perp$  co z kolei oznacza, że gdy  $K.x$  jest koizotropowa to włókno  $\mathcal{F}_x$  jest w niej zawarte. Aby scharakteryzować wszystkie układy dla których  $K$ -równoważność może być rozstrzygnięta przy użyciu  $\mu$  należy więc znaleźć te, dla których (przynajmniej) generyczna  $K$ -orbita jest koizotropowa. Jak się okazuje układy takie muszą spełniać szereg założeń, których analizę zawiera praca [6].

Kluczowe dla przedstawionego problemu jest rozważenie nie tylko działania grupy  $K$  ale i jej kompleksyfikacji  $G = K^{\mathbb{C}}$  na  $M$ . Z uwagi na to, że  $K$  jest maksymalną zwartą podgrupą  $G$ , grupa  $G$  jest *reduktywna*. Istotnym przykładem grupy reduktywnej jest grupa  $G = \text{SL}_N(\mathbb{C})$ , która jest kompleksyfikacją swojej zwartej podgrupy  $K = \text{SU}(N)$ . Rozważane w pracy [6] grupy są więc na mocy tego przykładu reduktywne. Grupa  $G$  jest znacznie większa niż  $K$ , a co za tym idzie liczba orbit  $G$  jest typowo mniejsza niż liczba orbit  $K$  w  $M$ . Jeżeli  $G$  ma w  $M$  otwartą gęstą orbitę  $\Omega = G/H$ , to  $M$  nazywamy *rozmaitością prawie-jednorodną* [34]. Rozmaitość taka ma w szczególności skończoną liczbę  $G$ -orbit. Wstępne rozważania przedstawione w pracy [6] prowadzą do wniosku, że warunkiem koniecznym na to aby rozstrzygać  $K$ -równoważność na  $M$  przy użyciu odwzorowania momentu, jest prawie-jednorodność  $M$  ze względu na działanie  $G$ . Nie jest to jednak warunek wystarczający, o czym można się przekonać rozważając chociażby przykład układu trzech kubitów, gdzie mamy dokładnie 6 orbit działania grupy  $G = \text{SL}(2, \mathbb{C})^{\times 3}$  [20], zaś stany  $x_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|111\rangle$  i  $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(|000\rangle + |010\rangle + |001\rangle)$ , gdzie  $\{|0\rangle, |1\rangle\} \subset \mathbb{C}^2$  jest bazą ortonormalną w  $\mathbb{C}^2$  spełniają  $\mu(x_1) = \mu(x_2)$ , ale nie są  $K$ -równoważne gdyż wiadomo, że należą do różnych  $G$ -orbit [20].

Istotną rolę w sformułowaniu warunku dostatecznego spełnia podgrupa Borela grupy  $G$ . Przypomnijmy, że z definicji podgrupa Borela jest maksymalną spójną rozwiązalną podgrupą grupy  $G$ . Przykładowo, dla  $G = \text{SL}_N(\mathbb{C})$ , grupa macierzy górno-trójkątnych, która jest stabilizatorem flagi standardowej w  $\mathbb{C}^N$ :

$$0 \subset \text{Span}\{|1\rangle\} \subset \text{Span}\{|1\rangle, |2\rangle\} \subset \dots \subset \text{Span}\{|1\rangle, \dots, |N-1\rangle\} \subset \text{Span}\{|1\rangle, \dots, |N\rangle\} = \mathcal{H},$$

jest grupą Borela. W ogólności, każde dwie grupy Borela są sprzężone za pomocą elementu grupy  $G$ . Dlatego też, w rozważanym przykładzie,  $B$  jest podgrupą Borela wtedy i tylko wtedy, gdy stabilizuje pewną flagę standardową. Pojęciem kluczowym dla problemu  $K$ -równoważności stanów jest pojęcie przestrzeni sferycznej.  $G$ -jednorodna przestrzeń  $\Omega = G/H$

jest sferyczną przestrzenią jednorodną wtedy i tylko wtedy gdy jakaś, a zatem każda, podgrupa Borela  $B \subset G$  ma otwartą gęstą orbitę w  $\Omega$ . Jeżeli  $G$  ma otwartą gęstą orbitę  $\Omega = G/H$  w  $M$  oraz  $\Omega$  jest jednorodną przestrzenią sferyczną, to  $M$  jest tzw. sferycznym zanurzeniem  $\Omega = G/H$ . Takie  $M$  nazywamy też prawie-jednorodną przestrzenią sferyczną. Odwzorowanie momentu rozdziela  $K$ -orbity na prawie jednorodnej sferycznej przestrzeni  $M$ . Jest to treść twierdzenia Briona [13]:

**Twierdzenie 1** (Brion) *Niech  $K$  będzie spójną zwartą grupą Liego działającą w sposób symplektyczny na zwartej i spójnej rozmaitości Kählera  $(M, \omega)$  i niech  $G = K^{\mathbb{C}}$ . Następujące dwa warunki są równoważne*

1.  $M$  jest sferycznym zanurzeniem  $G$ -orbity.
2. Dla każdego  $x \in M$  włókno  $\mu^{-1}(\mu(x))$  jest zawarte w  $K.x$ .

W pracy [6] stosujemy twierdzenie Briona wskazując, że gęsta orbita grupy Borela istnieje tylko w wypadku układu dwóch fermionów, dwóch bozonów oraz dwóch cząstek rozróżnialnych. Są to więc jedyne układy w których  $K$ -równoważność można rozstrzygnąć przy użyciu zredukowanych jednocząstkowych macierzy gęstości.

W drugiej części pracy [6], dla układów spełniających założenia twierdzenia Briona, dokonujemy dokładnego opisu struktury geometrycznej  $K$ -orbit. Orbity dołączone są rozmaitościami symplektycznymi.  $K$ -orbity w  $M$  typowo nie są jednak symplektyczne. Przyczyną tego jest znikanie formy symplektycznej na przestrzeni stycznej do włókien odwzorowania momentu, które zawarte są w orbitach. Na orbitach  $K$  mamy więc do czynienia z częściową strukturą symplektyczną. Opisanie tej struktury jest możliwe ponieważ zgodnie z treścią twierdzenia Briona odwzorowanie momentu  $\mu : M \rightarrow \mathfrak{k}$  parametryzuje  $K$ -orbity w  $M$  w takim sensie, że bijektywnie odwzorowuje zbiór  $K$ -orbit w  $M$  na zbiór  $K$ -orbit w  $\mu(M)$ . Obraz ten jest dany przez  $K.P$ , gdzie  $P$  to wypukły obszar w podalgebrze Cartana  $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{k}$ . W pracy [6] podajemy opis  $P$  jako wielościanu prawdopodobieństwa. Znajdujemy również rzeczywisty zbiór algebraiczny  $\Sigma_{\mathbb{R}}^+$  w  $M$ , zdefiniowany za pomocą liniowych równań i nierówności, który parametryzuje  $K$ -orbity w  $M$  i który jest odwzorowywany na obszar  $P$ . Każdy element  $x$  z  $\Sigma_{\mathbb{R}}^+$  określa wektor  $d = (d_1, \dots, d_k)$ , który jednoznacznie charakteryzuje obraz odwzorowania momentu jako rozmaitość flagową  $F(d_1, \dots, d_k)$ . Opisujemy również strukturę włókna  $\mathcal{F}_x = \mu^{-1}(\mu(x))$  odwzorowania momentu. Jest to włókno jednorodnego rozwłóknienia  $K/K_x \rightarrow K/K_{\mu(x)}$ , które (z dokładnością do skończonych nakryć) jest iloczynem ustalonych przestrzeni symetrycznych. Dla bozonów jest to produkt torusa i przestrzeni symetrycznych typu  $SU_m/SO_m$ . Dla fermionów mamy sytuację analogiczną, z tym że przestrzenie symetryczne są typu  $SU_m/USp_m$ .

### 4.3.2 Stany wyjątkowe, sferyczność i $K$ -równoważność

W poprzednim rozdziale podaliśmy warunek konieczny i wystarczający rozstrzygnięcia  $K$ -równoważności stanów przy użyciu wyłącznie odwzorowania momentu. Było nim wymaganie aby przestrzeń stanów była sferycznym zanurzeniem przestrzeni  $G = K^{\mathbb{C}}$ -jednorodnej. W pracy [5] dowodzimy, że istnienie tzw. stanów wyjątkowych w przestrzeni  $M$  jest przeszkodą dla sferyczności  $M$ . Jak pokazujemy, stany takie istnieją w  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$  dla wszystkich rozważanych



układów cząstek rozróżnialnych i nierozróżnialnych, za wyjątkiem przypadku, gdy ich liczba jest równa 2.

Aby zdefiniować pojęcie stanu wyjątkowego należy najpierw powiedzieć czym jest rząd i rząd graniczny stanu należącego do  $M$  [46]. Rząd stanu definiujemy względem stanów koherentnych Perelomova [58]  $\mathbb{X}$  działania grupy  $K$  na  $M$ . W wypadku cząstek rozróżnialnych  $\mathbb{X}$  jest obrazem odwzorowania Segre danego przez  $\text{Segre} : \mathbb{P}(\mathcal{H}_1) \times \dots \times \mathbb{P}(\mathcal{H}_L) \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{H})$ , które ma następujące działanie  $([v_1], \dots, [v_L]) \mapsto [v_1 \otimes \dots \otimes v_L]$ . Elementy  $\mathbb{X}$  są więc stanami odpowiadającymi tensorom prostym. Dla bozonów  $\mathbb{X}$  jest obrazem odwzorowania Veronese:  $\text{Ver}_L : \mathbb{P}(\mathcal{H}_1) \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{H})$ , które działa jako  $[v] \mapsto [v^L]$ , zaś dla fermionów  $\mathbb{X}$  jest obrazem odwzorowania Plückera  $\text{Pl}_L : \text{Gr}(L, \mathcal{H}_1) \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{H})$ , które działa jako  $U \mapsto [u_1 \wedge \dots \wedge u_L]$ , gdzie  $u_1, \dots, u_L$  jest bazą w  $U$ . Rząd stanu definiujemy jako

$$\text{rk}[\psi] = \text{rk}_{\mathbb{X}}[\psi] = \min\{r \in \mathbb{N} : \psi = x_1 + \dots + x_r \text{ gdzie } [x_j] \in \mathbb{X}\}. \quad (3)$$

Zbiór stanów o rzędzie  $r$  będziemy oznaczać przez  $\mathbb{X}_r = \{[\psi] \in \mathbb{P}(\mathcal{H}) : \text{rk}[\psi] = r\}$ . Jak łatwo zauważyć zbiory  $\mathbb{X}_r$  nie są domknięte (w sensie topologii Zariskiego), mamy bowiem, że  $\mathbb{X} \subset \overline{\mathbb{X}_r}$  oraz  $\mathbb{X} \not\subseteq \mathbb{X}_r$ . Rozmaitość siecznych rzędu  $r$ ,  $\sigma_r(\mathbb{X})$  jest rozmaitością zawierająca domknięcia zbiorów stanów rzędu co najwyżej  $r$ :  $\sigma_r(\mathbb{X}) = \bigsqcup_{s \leq r} \overline{\mathbb{X}_s} \subset \mathbb{P}(\mathcal{H})$ , jest więc to

dobrze określona rozmaitość algebraiczna. Okazuje się, że mogą istnieć stany  $x \in \mathbb{P}(\mathcal{H})$  o pewnym ustalonym rzędzie  $r$ , które można z dowolną precyzją przybliżyć stanami o niższym rzędzie. Dla dowolnego stanu  $[\psi] \in \mathbb{P}(\mathcal{H})$  definiujemy zatem *rzęd graniczny* względem  $\mathbb{X}$  jako  $\underline{\text{rk}}[\psi] = \underline{\text{rk}}_{\mathbb{X}}[\psi] = \min\{r \in \mathbb{N} : [\psi] \in \overline{\mathbb{X}_r}\}$ . Stany, dla których  $\underline{\text{rk}}[\psi] < \text{rk}[\psi]$  nazywamy *stanami wyjątkowymi*. Stany wyjątkowe okazują się być ściśle związane ze sferycznością. W pracy [5] pokazujemy, że dla przestrzeni rzutowej  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ , która jest prawie-jednorodną przestrzenią sferyczną (nie tylko w wypadku wielu (nie)rozróżnialnych cząstek), nie istnieją stany wyjątkowe. Dokładniej:

**Twierdzenie 2** *Niech  $G \rightarrow GL(\mathcal{H})$  będzie taką nieprzywiedlną reprezentacją reduktywnej grupy  $G$ , że działanie  $G$  na  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$  jest sferyczne. Niech  $\mathbb{X} \subset \mathbb{P}(\mathcal{H})$  będzie jedyną domkniętą orbitą  $G$ -orbit. Wówczas rząd i rząd graniczny na  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$  względem  $\mathbb{X}$  pokrywają się, tj.  $\text{rk}_{\mathbb{X}}[\psi] = \underline{\text{rk}}_{\mathbb{X}}[\psi]$  dla wszystkich  $[\psi] \in \mathbb{P}(\mathcal{H})$ . Innymi słowy w  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$  nie ma stanów wyjątkowych.*

Dowód tego twierdzenia oparty jest na klasyfikacji sferycznych reprezentacji grup reduktywnych podanej w [42].

Aby więc pokazać, że brak stanów wyjątkowych w  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$  jest równoważny (dla przestrzeni wielu cząstek) sferyczności musimy wykazać, że stany wyjątkowe istnieją zawsze, gdy liczba cząstek  $L$  jest większa niż dwa. Przykładem stanu wyjątkowego jest 3-kubitowy stan  $|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle)$ . Aby się o tym przekonać rozważmy jednoparametrową grupę daną przez

$$A(a) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a + a^{-1} & a - a^{-1} \\ a - a^{-1} & a + a^{-1} \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{C}^\times,$$

którą można też zapisać jako:

$$A(a) = g_0 A_1(a) g_0^{-1}, \text{ gdzie } A_1(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}), \quad g_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in SU(2).$$

Jak pokazujemy w [5] mamy następującą zbieżność w  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ :  $A(a)^{\otimes 3}[|000\rangle + |111\rangle] \xrightarrow{a \rightarrow 0} g_0^{\otimes 3}[|011\rangle + |101\rangle + |110\rangle]$ . Stan  $g_0W$ , a co za tym idzie stan  $W$  może więc zostać przybliżony stanami o rzędzie 2. Ale bezpośredni rachunek pokazuje, że stan  $|W\rangle$  ma rząd 3. Tak więc  $|W\rangle$  jest stanem wyjątkowym. Jak dowodzimy w pracy [5], istnienie stanów wyjątkowych dla 3 kubitów pociąga za sobą istnienie takich stanów dla stanów czystych  $L \geq 3$  cząstek rozróżnialnych. Podobnie można pokazać, że ich istnienie dla trzech bozonów, które wykazujemy używając rezultatów [18] i [15], oraz trzech sześciostanowych fermionów, które wykazujemy używając [36], pociąga ich istnienie dla stanów czystych  $L \geq 3$  cząstek nierozróżnialnych. W pracy [5] udowadniamy więc, że

**Twierdzenie 3** *Załóżmy, że zespolona grupa reduktywna  $G$  działa nieprzywiedlnie na wielocząstkowej przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}$  i niech  $\mathbb{X} \subset \mathbb{P}(\mathcal{H})$  będzie zbiorem stanów koherentnych, które tworzą jedyną domkniętą  $G$ -orbitę w przestrzeni rzutowej  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ .*

- (i)  $\mathcal{H}_D = \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_L$ ,  $G_D = GL(\mathcal{H}_1) \times \dots \times GL(\mathcal{H}_L)$ ,  $\mathbb{X} = \text{Segre}(\mathbb{P}(\mathcal{H}_1) \times \dots \times \mathbb{P}(\mathcal{H}_L))$ .
- (ii)  $\mathcal{H}_B = S^L(\mathcal{H}_1)$ ,  $G = GL(\mathcal{H}_1)$ ,  $\mathbb{X} = \text{Ver}_L(\mathbb{P}(\mathcal{H}_1))$ .
- (iii)  $\mathcal{H}_F = \bigwedge^L \mathcal{H}_1$ ,  $G = GL(\mathcal{H}_1)$ ,  $\mathbb{X} = \text{Pl}_L(\text{Gr}(L, \mathcal{H}_1))$ .

*Wówczas działanie  $G$  na  $\mathbb{P}(\mathcal{H}_{B,F})$  ( $G_D$  on  $\mathbb{P}(\mathcal{H}_D)$ ) jest sferyczne wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieją stany wyjątkowe w  $\mathbb{P}(\mathcal{H}_{B,F})$  ( $\mathbb{P}(\mathcal{H}_D)$ ) względem  $\mathbb{X}$ . Innymi słowy sferyczność jest równoważna warunkowi, że stany o określonym rzędzie nie mogą być aproksymowane przez stany o rzędzie niższym.*

Łącząc to twierdzenie z rezultatami opisanymi w poprzednim rozdziale dostajemy główny rezultat pracy [5] mówiący, że istnienie stanów wyjątkowych jest przeszkodą do rozstrzygnięcia  $K$ -równoważności stanów przy użyciu odwzorowania momentu.

### 4.3.3 Redukcja symplektyczna i $K$ -równoważność

Jak dyskutowaliśmy w poprzednich rozdziałach, zarówno dla cząstek rozróżnialnych jak i nierozróżnialnych, jedynymi układami wielocząstkowymi, dla których przestrzeń stanów czystych ma własność sferyczności lub równoważnie nie posiada stanów wyjątkowych, są układy dwucząstkowe,  $L = 2$ . Dla takich układów  $K$ -orbita w  $M$  są w odpowiedności 1-1 z orbitami dołączonymi w  $\mu(M) \subset \mathfrak{k}$ , a co za tym idzie  $K$ -równoważność stanów jest rozstrzygalna za pomocą odwzorowania momentu, poprzez porównanie odpowiednich widm zredukowanych macierzy gęstości lub wartości wielomianów niezmienniczych ze względu na działanie dołączone  $p_i : \mathfrak{k} \rightarrow \mathbb{R}$ , które dane są przez ślady potęg jednocząstkowych macierzy gęstości. Gdy  $L > 2$  liczba wielomianów  $\{p_i\}$  nie jest wystarczająca do rozstrzygnięcia  $K$ -równoważności stanów. Niemniej jednak, warunek  $\mu(K \cdot |\phi_1\rangle) = \mu(K \cdot |\phi_2\rangle)$  jest warunkiem koniecznym  $K$ -równoważności stanów  $|\phi_1\rangle$  i  $|\phi_2\rangle$ . Obraz odwzorowania momentu  $\mu(M)$  składa się z orbit dołączonych w  $\mathfrak{k}$ . Każda taka orbita przecina podalgebrę Cartana  $\mathfrak{t}$  w skończonej liczbie punktów połączonych działaniem grupy Weyla. Niech  $\mathfrak{t}_+ \subset \mathfrak{t}$  będzie dodatnią komórką Weyla, zaś  $\Psi : M \rightarrow \mathfrak{t}_+$  będzie takie, że  $\Psi(|\phi\rangle) = \mu(K \cdot |\phi\rangle) \cap \mathfrak{t}_+$ . W rozważanych układach  $\Psi$  przyporządkowuje stanowi  $|\phi\rangle$  uporządkowane widma (przesuniętych) zredukowanych jednocząstkowych macierzy gęstości. Poprzez ograniczenie  $\mu(M)$  do dodatniej komórki Weyla  $\mathfrak{t}_+ \subset \mathfrak{t}$  otrzymujemy więc przestrzeń  $\Psi(M) = \mu(M) \cap \mathfrak{t}_+$ , która parametryzuje orbity dołączone w  $\mu(M) \subset \mathfrak{k}$  [24]. Słynne twierdzenia dotyczące wypukłości odwzorowania momentu [8, 25, 38] zapewniają, że  $\Psi(M)$  jest wypukłym wielościanem, zwany wielościanem Kirwan. Warunek konieczny



$K$ -równoważności stanów  $[\phi_1]$  i  $[\phi_2]$  przyjmuje więc postać  $\Psi([\phi_1]) = \Psi([\phi_2])$ . Jak pokazujemy w pracy [4], dla stanów  $L$  kubitów spełniających warunek konieczny, liczba brakujących wielomianów zależy od widm zredukowanych macierzy gęstości, a więc od punktu wielościanu  $\Psi(M)$ . Dla  $\alpha \in \Psi(M)$ , liczba brakujących wielomianów jest równa wymiarowi zredukowanej przestrzeni symplektycznej  $M_\alpha = \Psi^{-1}(\alpha)/K$ . W pracy [4] przedstawiona jest analiza  $\dim_{\mathbb{R}} \Psi^{-1}(\alpha)/K$  dla dowolnego  $\alpha \in \Psi(M)$ .

Dla układu  $L$  kubitów nierówności opisujące wielościan  $\Psi(M)$  są znane [31]. Jeżeli  $\{p_i, 1 - p_i\}$  jest uporządkowanym rosnąco widmem  $i$ -tej zredukowanej macierzy gęstości, zaś  $\lambda_i = \frac{1}{2} - p_i$  to  $\Psi(M)$  dane jest przez:  $0 \leq \lambda_l \leq \frac{1}{2}$  oraz  $(\frac{1}{2} - \lambda_l) \leq \sum_{j \neq l} (\frac{1}{2} - \lambda_j)$ . Metody użyte w [4] do obliczenia wymiaru przestrzeni  $M_\alpha$  są zasadniczo różne dla punktów  $\alpha$  należących do wnętrza i brzegu wielościanu  $\Psi(M)$ . Z faktu, że wymiar wielościanu  $\Psi(M)$  jest równy wymiarowi  $t_+$  dla  $L > 2$  wynika, że generyczna  $K$ -orbita w przestrzeni stanów  $M$  ma wymiar grupy  $K$  [64]. Wykorzystując regularność odwzorowania  $\mu$  [29, 49], dla punktów  $\alpha$  wewnątrz wielościanu, dostajemy:

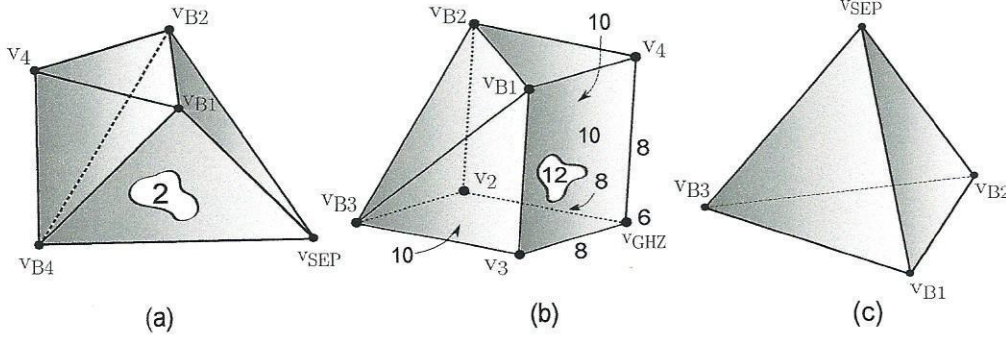
$$\begin{aligned} \dim M_\alpha &= \dim(\Psi^{-1}(\alpha)/K) = (\dim \mathbb{P}(\mathcal{H}) - \dim \Psi(\mathcal{H})) - \dim K = \\ &= ((2^{L+1} - 2) - L) - 3L = 2^{L+1} - 4L - 2. \end{aligned} \quad (4)$$

Punkty  $\alpha$  należące do brzegu  $\Psi(M)$  można podzielić na trzy klasy: (i)  $k$  z  $\lambda_l$  są równe  $\frac{1}{2}$ , (ii) przynajmniej jedna z nierówności  $(\frac{1}{2} - \lambda_l) \leq \sum_{j \neq l} (\frac{1}{2} - \lambda_j)$  jest równością, (iii)  $k$  z  $\lambda_l$  są równe 0. W przypadku (i) nierówności opisujące wielościan  $\Psi(M)$  redukują się do nierówności opisujących analogiczny wielościan dla  $L - k$  kubitów. Dlatego też  $\dim M_\alpha = ((2^{L-k+1} - 2) - (L - k)) - 3(L - k) = 2^{L-k+1} - 4(L - k) - 2$ . W przypadku (ii), jak pokazujemy w pracy [4] stany, które są posyłane przez  $\Psi$  na punkty wielościanu  $\Psi(M)$ , dla których przynajmniej jedna z nierówności  $(\frac{1}{2} - \lambda_l) \leq \sum_{j \neq l} (\frac{1}{2} - \lambda_j)$  jest równością, należą do  $K^{\mathbb{C}}$ -orbity przez  $L$ -kubitowy stan  $[W] = |01 \dots 1\rangle + |101 \dots 1\rangle + \dots + |1 \dots 10\rangle$ . Jak pokazano w pracy [64], domknięcie tej orbity jest prawie jednorodną przestrzenią sferyczną, a więc włókna odwzorowanie momentu są zawarte w  $K$ -orbitach, a co za tym idzie  $\dim M_\alpha = 0$ . Przypadek (iii), gdy  $k$  z  $\lambda_l$  są równe 0 jest najtrudniejszy i wymaga użycia elementów tzw. Geometrycznej Teorii Niezmienników - Geometric Invariant Theory (GIT) [52]. W teorii tej istotną rolę odgrywają tzw. stany stabilne [52, 53]. W szczególności stan  $[\phi]$  jest stabilny, jeżeli  $\mu([\phi]) = 0$  oraz  $\dim K \cdot [\phi] = \dim K$  [39]. W wypadku, gdy dla symplektycznego działania pewnej zwartej grupy  $\tilde{K}$  istnieją stany stabilne mamy,  $\tilde{\mu}^{-1}(0)/\tilde{K} = \dim \mathbb{P}(\mathcal{H}) - 2\dim \tilde{K}$ , gdzie  $\tilde{\mu}$  jest odwzorowaniem momentu stowarzyszonym z  $\tilde{K}$  [4]. Jak zauważamy w pracy [4], dla  $K = K_1 \times K_2$ , gdzie  $K_1 = SU(2)^{\times k}$  i  $K_2 = SU(2)^{\times (L-k)}$ , rozważając działanie  $K_1$  na pierwszych  $k$  kubitach otrzymujemy odwzorowanie momentu  $\mu_1$ , które daje  $k$  pierwszych jednocząstkowych macierzy gęstości. Zatem  $\mu_1^{-1}(0)$  składa się ze stanów, dla których  $k$  pierwsze, jednocząstkowe macierze gęstości są maksymalnie zmieszane, zaś pozostałe  $L - k$  są dowolne. W pracy [4] pokazujemy również, że istnieje stan stabilny ze względu na działanie  $K_1$  na  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ . Dlatego też  $\dim \mu_1^{-1}(0)/K_1 = \dim \mathbb{P}(\mathcal{H}) - 2\dim K_1 = 2^{L+1} - 6k - 2$ . Przestrzeń  $\mu_1^{-1}(0)/K_1$  jest przestrzenią symplektyczną. Działania  $K_1$  i  $K_2$  są przemienne względem siebie. Możemy więc rozważyć działanie  $K_2$  na  $\mu_1^{-1}(0)/K_1$ . Odwzorowanie momentu  $\mu_2$  dla działania  $K_2$  na  $\mu_1^{-1}(0)/K_1$  daje pozostałe  $L - k$  zredukowanych macierzy gęstości. Wielościan dany przez  $\Psi_2$  ma wymiar  $L - k$ . Używając wzoru na wymiar przestrzeni zredukowanej odpowiadającej punktom we

wnętrzu wielościanu dostajemy:

$$\begin{aligned} ((\dim \mu_1^{-1}(0)/K_1) - (L - k)) - \dim K_2 &= ((2^{L+1} - 6k - 2) - (L - k)) - 3(L - k) \\ &= 2^{L+1} - 4L - 2k - 2, \end{aligned}$$

a więc szukany wymiar dla przypadku (iii).



Rysunek 1: Trzy rodzaje brzegu  $\Psi(\mathbb{P}(\mathcal{H}))$  dla czterech kubitów. Liczby oznaczają  $\dim M_\alpha$ . Jeżeli liczba nie jest podana to  $\dim M_\alpha = 0$ .

#### 4.4 $K^{\mathbb{C}}$ -równoważność stanów kwantowych

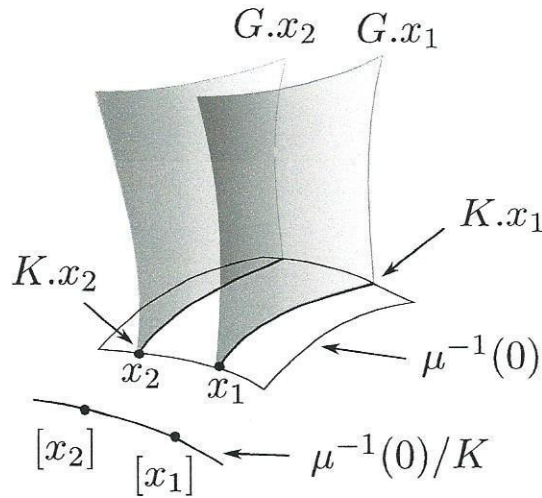
Kolejnym podstawowym problemem w dziedzinie korelacji kwantowych jest klasyfikacja stanów ze względu na operacje SLOCC - Stochastic Local Operations and Classical Communication [68]. Klasyfikacja ta jest wciąż nie w pełni zbadana. Dla rozważanych układów wielocząstkowych, odwracalne operacje SLOCC odpowiadają elementom kompleksyfikacji  $G = K^{\mathbb{C}}$  zawartej grupy lokalnych operacji unitarnych  $K$ , zaś dwa stany są  $G$ -równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy należą do tej samej  $G$ -orbity [41]. Przypomnijmy, że w wypadku  $K$ -równoważności problem jest rozwiązalny przy użyciu wielomianów  $K$ -niezmienniczych. Ponieważ grupa  $G$  jest reduktywna, twierdzenie Hilberta i Nagaty [52] zapewnia, że pierścień wielomianów  $G$ -niezmienniczych jest skończenie generowany. Problem  $G$ -równoważności okazuje się jednak być istotnie różny od problemu  $K$ -równoważności. Jak zauważamy w pracy [3], istotą tej różnicy jest fakt, że grupa  $G$  nie jest grupą zwartą, a co za tym idzie,  $G$ -orbity nie muszą być domknięte. Dla dwóch wektorów  $\phi$  i  $\psi$  spełniających  $G \cdot \phi \cap G \cdot \psi = \emptyset$  może więc zachodzić  $\overline{G \cdot \phi} \cap \overline{G \cdot \psi} \neq \emptyset$ . Wielomiany  $G$ -niezmiennicze są funkcjami ciągłymi, a zatem nie jest możliwe rozróżnienie przy ich użyciu między takimi orbitami  $G \cdot \phi$  i  $G \cdot \psi$ . Możliwe jest tylko rozróżnienie między orbitami, których domknięcia mają niepuste przecięcia, w szczególności między  $G$ -orbitami, które są domknięte. Przestrzeń orbit  $M/G$ , a więc przestrzeń ilorazowa powstająca z podzielenia przestrzeni stanów przez działanie grupy  $G$ , nie jest przestrzenią Hausdorffa - nie każde dwa punkty są oddzielone przez otwarte otoczenia. Problem  $G$ -równoważności stanów wymaga więc przede wszystkim zrozumienia struktury przestrzeni orbit działania niezawartej reduktywnej grupy na przestrzeni wektorowej  $\mathcal{H}$  (równoważnie: przestrzeni rzutowej  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ ).

Dwie orbity  $G \cdot \phi$  oraz  $G \cdot \psi$  w  $\mathcal{H}$  nazywamy  $c$ -równoważnymi,<sup>1</sup> jeżeli istnieje ciąg orbit  $G \cdot \phi = G \cdot v_1, G \cdot v_2, \dots, G \cdot v_n = G \cdot \psi$  taki, że  $\overline{G \cdot v_k} \cap \overline{G \cdot v_{k+1}} \neq \emptyset$ . Relacja  $c$ -równoważności

<sup>1</sup>Od angielskiego closure equivalent.

dzieli  $G$ -orbity na klasy równoważności ( $c$ -klasy). Okazuje się, że w istocie każda taka  $c$ -klasa zawiera dokładnie jedną domkniętą  $G$ -orbitę, która jest zawarta w domknięciu każdej  $G$ -orbity z rozważanej  $c$ -klasy. Wymiar tej orbity jest najmniejszy w całej  $c$ -klasie. Klasy  $c$ -równoważności są więc parametryzowane domkniętymi  $G$ -orbitami, a wielomiany  $G$ -niezmiennicze rozróżniają między  $G$ -orbitami należącymi do różnych  $c$ -klas [52]. W dalszej części skupimy się więc na konstrukcji przestrzeni ilorazowej względem relacji  $c$ -równoważności.

Wśród wszystkich  $c$ -klas można wyróżnić tę, która odpowiada wektorowi zerowemu - tzw. stożek zerowy<sup>2</sup> [54]. Klasę tę należy usunąć, jeżeli chcemy rozważać przestrzeń ilorazową na poziomie przestrzeni rzutowej. Po usunięciu z przestrzeni rzutowej  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$  punktów odpowiadających wektorom ze stożka zerowego otrzymujemy przestrzeń tzw. punktów *semistabilnych*,  $\mathbb{P}(\mathcal{H})_{ss}$ . Dwa punkty  $x_1, x_2 \in \mathbb{P}(\mathcal{H})_{ss}$  są  $c$ -równoważne, jeżeli istnieją wektory  $v_1, v_2 \in \mathcal{H}$  takie, że  $x_1 = [v_1]$  i  $x_2 = [v_2]$  i na poziomie przestrzeni Hilberta zachodzi  $\overline{G.v_1} \cap \overline{G.v_2} \neq \emptyset$ . Przestrzeń ilorazową uzyskaną z przestrzeni punktów semistabilnych względem relacji  $c$ -równoważności oznaczamy przez  $\mathbb{P}(\mathcal{H})_{ss} // G$ . Jest ona algebraiczną rozmaitością rzutową znaną w literaturze pod nazwą *GIT quotient*<sup>3</sup> [53] i będziemy ją nazywać *przestrzenią GIT*. Punkty przestrzeni GIT odpowiadają  $c$ -klasom punktów semistabilnych i są w odpowiedności 1 – 1 z domkniętymi  $G$ -orbitami. Do tej pory nie użyliśmy jeszcze odwzorowania momentu. Otóż okazuje się, że każda domknięta  $G$ -orbita w  $\mathbb{P}(\mathcal{H})_{ss}$  zawiera dokładnie jedną  $K$ -orbitę z  $\mu^{-1}(0)$  [37]. W oczywisty sposób dostajemy więc równoważność  $\mu^{-1}(0)/K \cong \mathbb{P}(\mathcal{H})_{ss} // G$ .



Rysunek 2: Idea konstrukcji GIT i odwzorowanie momentu:  $\mu^{-1}(0)/K \cong \mathbb{P}(\mathcal{H})_{ss} // G$ .

Zbiór domkniętych  $G$ -orbit dany jest więc przez działanie  $G$  na  $\mu^{-1}(0)$ , tj.  $G.\mu^{-1}(0)$ . Wśród punktów semistabilnych wyróżniamy tzw. punkty stabilne  $\mathbb{P}(\mathcal{H})_s = \{x \in \mathbb{P}(\mathcal{H})_{ss} : \dim G.x = \dim G \text{ i } G.x \cap \mu^{-1}(0) \neq \emptyset\}$ . Istnienie jednego punktu stabilnego sprawia, że  $\mathbb{P}(\mathcal{H})_s$  jest zbiorem otwartym i gęstym w  $\mathbb{P}(\mathcal{H})_{ss}$ , tzn. prawie każdy punkt semistabilny jest stabilny [50, 53]. Dla punktu stabilnego  $x \in \mathbb{P}(\mathcal{H})_s$  klasa  $c$ -równoważności składa się ponadto z do-

<sup>2</sup>Null cone

<sup>3</sup>Geometric Invariant Theory

kładnie jednej domkniętej orbity  $G.x$ . Dla punktów semistabilnych ale nie stabilnych, klasa ta składa się zawsze z nieskończenie wielu  $G$ -orbit.

Wektory należące do stożka zerowego, a więc  $c$ -klasa dla której domknięta  $G$ -orbita jest wektorem zerowym, mogą reprezentować ważne z punktu widzenia korelacji kwantowych stany. Przykładowo stany  $|W\rangle = 1/\sqrt{3}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle)$  i stan separowalny należą do stożka zerowego, a ich własności kwantowe są istotnie różne. Potrzebna jest więc dokładniejsza procedura podziału  $G$ -orbit - taka, która zawiera w sobie konstrukcje GIT oraz daje matematycznie i fizycznie dobrze określoną stratyfikację stożka zerowego. Kluczową rolę spełnia tu funkcja  $\|\mu\|^2 : \mathbb{P}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{R}$ . Funkcja ta ma jasną interpretację fizyczną. Zgodnie z definicją Klyachko [41] całkowita wariancja stanu  $[v] \in \mathbb{P}(\mathcal{H})$ , względem grupy symetrii  $K \subset SU(\mathcal{H})$  dana jest przez

$$\text{Var}([v]) = \frac{1}{\langle v|v\rangle} \left( \sum_{i=1}^{\dim K} \langle v|\xi_i^2|v\rangle - \frac{1}{\langle v|v\rangle} \sum_{i=1}^{\dim K} \langle v|\xi_i|v\rangle^2 \right) = c - 4 \cdot \|\mu\|^2([v]), \quad (5)$$

gdzie  $\xi_i$  jest bazą ortonormalną algebry  $\mathfrak{k}$ , zaś  $c$  stała niezależną od  $[v]$ . Funkcja  $\|\mu\|^2([v])$  może być również wyrażona jako wartość oczekiwana operatora Casimira  $C_2 = \sum_{i=1}^{\dim K} \xi_i^2$  [11, 27] działającego na przestrzeni  $\text{Sym}^2 \mathcal{H}$  [57]. Mamy wówczas  $C_2^v = \sum_{i=1}^{\dim K} (\xi_i \otimes I + I \otimes \xi_i)^2$  i  $\frac{1}{\langle v|v\rangle} \langle v \otimes v | C_2^v | v \otimes v \rangle = 2c + 8 \|\mu\|^2([v])$ . Wreszcie  $\|\mu\|^2$  jest związana bezpośrednio z liniową entropią, która jest liniową funkcją całkowitej wariancji.

Punkt  $[v] \in \mathbb{P}([v])$  jest punktem krytycznym  $\|\mu\|^2$ , jeżeli spełnia równanie własne  $\mu([v])v = \lambda v$  [3]. Punkty krytyczne funkcji  $\|\mu\|^2$  możemy więc podzielić na dwie kategorie. Do pierwszej należą wszystkie  $K$ -orbita z  $\mu^{-1}(0)$ . Są to tzw. punkty minimalne dla których  $\|\mu\|^2$  osiąga globalne minimum równe zero. Punkty minimalne odpowiadają więc stanom o maksymalnej wariancji i maksymalnej liniowej entropii. Pozostałe punkty krytyczne dane są przez pewne  $K$ -orbita ze stożka zerowego. Dla tych punktów  $\mu([v]) \neq 0$  oraz  $\mu([v])v = \lambda v$ . W stożku zerowym wyróżniamy więc  $G$ -orbita przechodzące przez krytyczne  $K$ -orbita.

Związek między punktami krytycznymi,  $c$ -równoważnością i konstrukcją GIT dostajemy przez rozważenie potoku gradientu funkcji  $-\|\mu\|^2$  [54]. Gradient ten jest dobrze określony, bowiem  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$  jest rozmaitością Kählera, a więc w szczególności posiada metrykę. Potok gradientu jest styczny do  $G$ -orbit i zdąża do krytycznych  $K$ -orbit. Dwa punkty  $x_1, x_2 \in \mathbb{P}(\mathcal{H})_{ss}$  są równoważne z punktu widzenia potoku gradientu  $-\|\mu\|^2$ , jeżeli są przezeń posyłane na tę samą krytyczną  $K$ -orbitę. Definicja ta jest zgodna z  $c$ -równoważnością. Jest jednak bardziej ogólna, ponieważ umożliwia rozszerzenie pojęcia równoważności na stożek zerowy. Sytuacja jest jednak bardziej złożona, ponieważ krytyczne  $K$ -orbita nie muszą znajdować się w jednym włóknie  $\Psi$  (przypomnijmy, że  $\Psi : \mathbb{P}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathfrak{k}$  jest dane przez  $\Psi(|\phi\rangle) = \mu(K \cdot |\phi\rangle) \cap \mathfrak{t}_+$ ). Niemniej jednak, w wielościanie  $\Psi(\mathbb{P}(\mathcal{H}))$  znajduje się skończona liczba punktów  $\{\alpha_i\}$  dla których  $\Psi^{-1}(\alpha_i)$  zawiera krytyczne  $K$ -orbita. Niech  $C_\alpha$  oznacza zbiór krytycznych  $K$  orbit odwzorowywanych przez  $\Psi$  na  $\alpha \in \mathfrak{t}_+$ , zaś  $N_\alpha$  będzie zbiorem tych wszystkich punktów, które potok gradientu  $-\|\mu\|^2$  sprowadza na  $C_\alpha$ . Otrzymujemy więc, że przestrzenie ilorazowe  $N_\alpha // G$  pochodzące z podzielenia zbiorów  $N_\alpha$  przez relacje równoważności indukowaną z potoku gradientu oraz zbiory  $C_\alpha / K$  są ze sobą tożsame (patrz Rysunek 3). Te ostatnie mają strukturę algebraicznej rozmaitości rzutowej. Warto podkreślić, że konstrukcja ta jest analogiczna do GIT. Dla  $\alpha = 0$  dostajemy, że  $N_0 = \mathbb{P}(\mathcal{H})_{ss}$ , zaś  $C_0 = \mu^{-1}(0)$ . Używając tak określonej relacji równoważności, możemy myśleć o przestrzeni ilorazowej  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$  przez  $G$  (nadużywając notacji:



$\mathbb{P}(\mathcal{H})/G$  jako przestrzeni składającej się ze skończonej liczby rozmaitości rzutowych:

$$\mathbb{P}(\mathcal{H})/G \cong \bigcup_{\alpha} N_{\alpha} // G \cong \bigcup_{\alpha} C_{\alpha}/K. \quad (6)$$

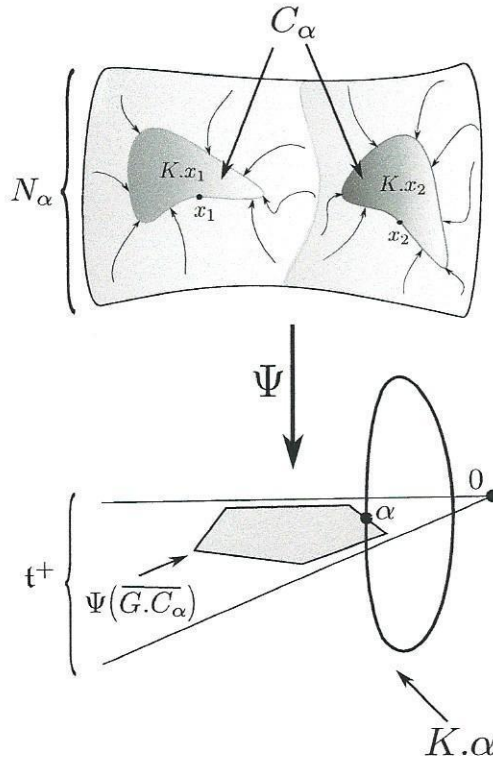
Odwzorowanie  $\Psi$  ma jeszcze jedną ważną własność, mianowicie nie tylko  $\Psi(\mathbb{P}(\mathcal{H}))$  jest wypukłym wielościanem, ale również obraz każdej  $G$ -orbity  $\Psi(\overline{G.x})$  ma tę własność [13]. Skończona liczba rozmaitości  $C_{\alpha}/K$  jest wynikiem tego, że  $N_{\alpha}$  można równoważnie zdefiniować jako te  $x \in \mathbb{P}(\mathcal{H})$ , dla których wielościany  $\Psi(\overline{G.x})$  mają ten sam punkt najbliższy zeru. Ale twierdzenie o wypukłości odwzorowania momentu dla  $G$ -orbit gwarantuje, że liczba takich wielościanów jest skończona [23], a więc liczba rozmaitości  $C_{\alpha}$  jest również skończona. Podsumowując, dostajemy następującą korespondencję:

Tabela 1: Słownik

$G$ -orbita	klasa stanów SLOCC
odwzorowanie momentu $\mu$	odwzorowanie przyporządkowujące stanowi $[v]$ zbiór jednocząstkowych macierzy gęstości
$\ \mu\ ^2([v])$	całkowita wariancja $\text{Var}([v])$ lub liniowa entropia
$c$ -klasa orbit	rodzina asymptotycznie równoważnych klas SLOCC
punkt stabilny	rodzina asymptotycznie równoważnych klas SLOCC składa się z dokładnie jednej klasy SLOCC
semistabilny, ale nie stabilny punkt	rodzina asymptotycznie równoważnych klas SLOCC składa się z nieskończenie wielu klas SLOCC
$\Psi(\overline{G.[v]})$	Wielościan momentu odpowiadający klasie SLOCC, zbiór wszystkich możliwych widm jednocząstkowych macierzy gęstości dla stanów $[u] \in \overline{G.[v]}$
warstwa $N_{\alpha}$	Stany dla których punkt $\alpha$ jest najbliższym zeru punktem wielościanów SLOCC
$C_{\alpha}$	punkty krytyczne $\text{Var}([v])$ o widmach zredukowanych macierzy gęstości danych przez $\alpha$ .

Przestrzeń  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$  można również podzielić na skończoną liczbę uogólnionych klas SLOCC przy użyciu wielościanów  $\Psi(\overline{G.x})$ , które w pracy [70] nazywane są wielościanami splątania, mówiąc że dwa stany są równoważne gdy ich wielościany splątania są takie same. Podział (6) jest tożsamy z tym podziałem z dokładnością do istnienia wielościanów splątania, które mają wspólny punkt najbliższy zeru.

Kluczowa dla uzyskania rozkładu (6) jest znajomość krytycznych  $K$ -orbit funkcji  $\|\mu\|^2$ . W pracy [3] wyznaczamy je dla dwóch cząstek rozróżnialnych i nierozróżnialnych, trzech kubitów i dowolnej liczby dwustanowych bozonów. Dla czterech kubitów pokazujemy, że większość klas wyznaczonych w [67] jest  $c$ -równoważna z klasą odpowiadającą  $\mu^{-1}(0)$ . Obliczenia dotyczące punktów krytycznych przedstawione w pracy [3] zostały wykonane przez bezpośrednie zastosowanie definicji punktu krytycznego funkcji  $\|\mu\|^2$ , tj. przez rozwiązanie problemu własnego  $\mu([v]).v = \lambda v$ . Zauważmy, że jest to równanie, w którym macierz  $\mu([v])$  zależy w sposób nieliniowy od wektora  $[v]$ . Wspomniane przypadki okazują się być jednymi, dla których możliwe jest wykonanie sprawne obliczeń przez bezpośrednie zastosowanie definicji do wyznaczenia punktów krytycznych.



Rysunek 3: Zbiory  $N_\alpha$  i  $C_\alpha$ , z dowolnymi przykładowymi  $K$ -orbitami,  $K.x_1$  i  $K.x_2$ . Strzałki reprezentują potok gradientu  $-\|\mu\|^2$ .

#### 4.4.1 Punkty krytyczne liniowej entropii dla układów wielokubitowych

Jak diskutowaliśmy w poprzednim rozdziale, punkty krytyczne  $\|\mu\|^2$  czy też liniowej entropii lub całkowitej wariacji, mają kluczowe znaczenia dla zrozumienia uogólnionych klas SLOCC. Wyznaczenie tych punktów przy użyciu definicji jest problemem trudnym, bowiem sprowadza się do rozwiązania zagadnienia własnego dla macierzy, która zależy w sposób nieliniowy od wektora na którym działa. W pracy [1] proponujemy metodę, która w znaczny sposób ułatwia znajdowanie punktów krytycznych. Jest ona oparta na odpowiedności między odwzorowaniem momentu dla abelowych i nieabelowych grup Liego.

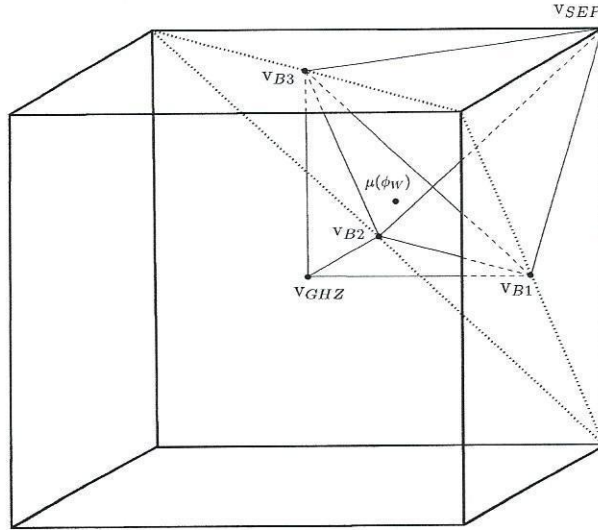
Dla zwartej grupy  $K$  oznaczamy przez  $T$  jej torus maksymalny, a więc maksymalną zwartą spójną podgrupę. Przykładowo, gdy  $K = SU(N)$ , torus maksymalny składa się z unitarnych macierzy diagonalnych o wyznaczniku równym jedności. Odwzorowanie momentu  $\mu_T : M \rightarrow \mathfrak{t}$  dla działania  $T$  na  $M$  jest obcięciem odwzorowania momentu  $\mu : M \rightarrow \mathfrak{k}$  do algebry Cartana  $\mathfrak{t} = \text{Lie}(T)$ . Mamy więc  $\mu([v]) = \mu_T([v]) + \alpha$ , gdzie  $\alpha \in \mathfrak{t}^\perp$ . Twierdzenie o wypukłości odwzorowania momentu gwarantuje, że  $\mu_T(M)$  jest wielościanem wypukłym. W wypadku grup abelowych, twierdzenie to podaje dokładną charakteryzację wierzchołków  $\mathbb{A}$  tego wielościanu [8]. Tworzą one skończony zbiór tzw. wag  $\mathbb{A} = \mu_T(M_T)$ , gdzie  $M_T$  to punkty stałe<sup>4</sup> działania  $T$  na  $M$ . Punkty krytyczne  $\|\mu_T\|^2$ , podobnie jak dla  $\|\mu\|^2$ , to punkty spełniające

<sup>4</sup>Punkt  $x \in M$  jest punktem stałym działania  $T$  jeżeli  $\forall t \in T.t.x = x$





równanie własne  $\mu_T([v]).v = \lambda v$ . Dla  $\beta \in \mu_T(M)$  punkt  $[v]$  jest zatem punktem krytycznym jeżeli  $\beta.v = \lambda v$ , a więc  $[v]$  jest punktem stałym  $T_\beta = \{e^{t\beta} : t \in \mathbb{R}\}$  i  $\mu_T([v]) = \beta$ . Zbiór punktów stałych  $M_{T_\beta}$  działania  $T_\beta$  nie jest rozmaitością symplektyczną. Jest nią natomiast zbiór  $Z_\beta$  będący jego ograniczeniem do punktów spełniających dodatkowo  $\langle \mu_T([v]), \beta \rangle = \langle \beta, \beta \rangle$ , a więc punktów, które są posyłane przez  $\mu_T$  na hiperpłaszczyznę prostopadłą do  $\beta$  i przechodzącą przez  $\beta$  [39]. Punkt  $x \in M_{T_\beta}$  spełniający warunek  $\mu_T([v]) = \beta$  spełnia również  $\langle \mu_T([v]), \beta \rangle = \langle \beta, \beta \rangle$ , a więc  $x \in Z_\beta$ . Zbiór  $Z_\beta$  jest  $T$ -niezmienniczą rozmaitością symplektyczną, a więc z twierdzenia o wypukłości dostajemy, że  $\mu(Z_\beta)$  jest wielościanem rozpiętym na wierzchołkach będących podzbiorem zbioru wag  $\mathbb{A}$ . Ponadto na mocy konstrukcji, punkt  $\beta$  jest punktem najbliższym zeru tego wielościanu. Podsumowując, dostajemy, że  $[v] \in M$  taki, że  $\mu_T([v]) = \beta$  i  $\beta$  jest minimalną kombinacją wypukłą podzbioru zbioru wag  $\mathbb{A}$ , jest punktem krytycznym wtedy i tylko wtedy, gdy  $[v] \in Z_\beta$  [39].



Rysunek 4: Wagi minimalne dla trzech kubitów. Punkt  $v_{GHZ}$  jest obrazem stanu  $|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle)$ , punkty  $v_{B_i}$  odpowiadają stanom biseparowalnym oraz  $|\phi_w\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|110\rangle + |101\rangle + |011\rangle)$ .

Funkcja  $\|\mu\|^2$  jest  $K$ -niezmiennicza, więc w celu znalezienia jej punktów krytycznych możemy ograniczyć się do  $[v] \in M$ , takich że  $\mu([v]) \in \mathfrak{t}_+$ . Dla takich stanów  $\mu([v]) = \mu_T([v])$  i  $[v]$  jest punktem krytycznym  $\|\mu\|^2$  wtedy i tylko wtedy, gdy jest punktem krytycznym  $\|\mu_T\|^2$ . Niech  $\mathcal{B}$  będzie zbiorem wszystkich minimalnych kombinacji wag z  $\mathbb{A}$  należących do  $\mathfrak{t}_+$ . Stan  $[v]$  jest więc stanem krytycznym wtedy i tylko wtedy gdy  $\mu([v]) \in \mathcal{B}$  i  $[v] \in Z_\beta$ . Zbiory krytyczne dane są zatem przez  $C_\beta = K.(Z_\beta \cap \mu^{-1}(\beta))$ , gdzie  $\beta \in \mathcal{B}$ . W pracy [1] stosujemy to rozumowanie do wyznaczenia punktów krytycznych liniowej entropii dla  $L$ -kubitowych stanów czystych. Zbiór  $\mathbb{A}$  jest obrazem odwzorowania  $\mu$  dla stanów bazowych  $B = |i_1, \dots, i_L\rangle$ , gdzie  $i_k \in \{0, 1\}$ , a więc ma  $2^L$  elementów. Przedstawiamy dyskusję szukania minimalnych kombinacji wag i wyznaczamy je do  $L = 5$  (na rysunku 4 pokazana jest konstrukcja odpowiadająca trzem kubitom). Pokazujemy, że dla  $\beta \in \mathcal{B}$ , zbiór  $Z_\beta = \mathbb{P}(S)$ , gdzie  $S$  to stany

AS

bazowe z  $B$  odpowiadające wagom użytym do konstrukcji  $\beta$ . Ponadto pokazujemy dla jakich  $\beta \in \mathcal{B}$  zbiory  $C_\beta$  są niepuste i podajemy metodę znajdowania ich reprezentantów. W tabeli 2 przedstawione są wyniki dla czterech kubitów. Rozważania kończymy obserwacją, że liczba wartości krytycznych liniowej entropii rośnie szybciej niż wykładniczo z  $L$ .

Critical $\alpha \in \Psi(\mathbb{P}(\mathcal{H}))$	State	$E(\phi)$
$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	Sep	0
$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	TriSep	$\frac{1}{4}$
$\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$ W^{(3)}\rangle \otimes  1\rangle$	$\frac{1}{3}$
$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	BiSep	$\frac{3}{8}$
$\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$	W	$\frac{3}{8}$
$\begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$	$\Phi_3$	$\frac{9}{20}$
$\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\Phi_2$	$\frac{11}{24}$
$\begin{pmatrix} -\frac{1}{14} & 0 \\ 0 & \frac{1}{14} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{14} & 0 \\ 0 & \frac{1}{14} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{14} & 0 \\ 0 & \frac{1}{14} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$	$\Phi_1$	$\frac{27}{56}$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	GHZ	$\frac{1}{2}$

Tabela 2: Krytyczne macierze zredukowane dla czterech kubitów. Wymienione stany to:  $|\text{TriSep}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle \otimes (|00\rangle + |11\rangle))$ ,  $|\text{BiSep}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \otimes (|000\rangle + |111\rangle)$ ,  $|W\rangle = \frac{1}{2}(|1110\rangle + |1101\rangle + |1011\rangle + |0111\rangle)$ ,  $|\Phi_3\rangle = \sqrt{\frac{3}{10}}(|1101\rangle + |1110\rangle) + \sqrt{\frac{2}{5}}|0011\rangle$ ,  $|\Phi_2\rangle = \frac{1}{2\sqrt{3}}(|1011\rangle + |1110\rangle) - \frac{1}{2}(|0101\rangle + |0011\rangle) + \frac{1}{\sqrt{3}}|0110\rangle$ ,  $|\Phi_1\rangle = \sqrt{\frac{3}{14}}(|0011\rangle + |0101\rangle + |1001\rangle) + \sqrt{\frac{5}{14}}|1110\rangle$ ,  $|\text{GHZ}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle + |1111\rangle)$ .

#### 4.5 Geometryczna i topologiczna charakteryzacja stanów $CQ$ i $CC$

W poprzednich rozdziałach zajmowaliśmy się zastosowaniem odwzorowania momentu do dwóch istotnych problemów korelacji kwantowych:  $K$  i  $K^C$  równoważności stanów czystych. W pracy [2] rozważamy stany mieszane w kontekście kwantowych korelacji istniejących dla stanów separowalnych (niesplątanych). Obecność korelacji kwantowych, które nie znikają nawet dla stanów separowalnych jest jednym z ciekawszych odkryć dokonanych w ostatnich latach w teorii informacji kwantowej. W 2001 Ollivier i Żurek [56] oraz niezależnie Henderson i Vedral [30] wprowadzili pojęcie kwantowego dyskordu, który przyjmuje wartości nieujemne [19] jako miarę kwantowości korelacji. Stany o znikającym kwantowym dyskordzie to tzw. *pointer states*, a dla układu dwóch cząstek są one tożsame z tzw. stanami  $CQ$  [19], których podklasą są stany  $CC$  [43]. Jeżeli  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , gdzie  $\mathcal{H}_A = \mathbb{C}^{N_1}$  i  $\mathcal{H}_B = \mathbb{C}^{N_2}$  to stan



jest  $CC$  jeżeli może zostać zapisany postaci  $\rho = \sum_{i,j} p_{ij} |i\rangle\langle i| \otimes |j\rangle\langle j|$ , gdzie  $\{|i\rangle\}_{i=1}^{N_1}$  to baza ortonormalna w  $\mathcal{H}_A$ , zaś  $\{|j\rangle\}_{j=1}^{N_2}$  w  $\mathcal{H}_B$ ; natomiast  $\rho$  jest stanem  $CQ$  jeżeli można go zapisać w postaci  $\rho = \sum_i p_i |i\rangle\langle i| \otimes \rho_i$ , gdzie  $\{\rho_i\}_{i=1}^{N_2}$  są macierzami gęstości na  $\mathcal{H}_B$ . Obie klasy stanów mają zerową miarę w przestrzeni macierzy gęstości na  $\mathcal{H}$  [21]. Dla stanów czystych pojęcia separowalności i zerowego dyskordu są tożsame. W pracy [63] pokazano, że czyste stany separowalne są geometrycznie wyróżnione w przestrzeni stanów i należą do jedynej symplektycznej  $K$ -orbity w przestrzeni  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ . W wypadku stanów mieszanych, już dla dwóch cząstek łatwo zauważyć, że istnieje nieskończenie wiele symplektycznych  $K$ -orbit, oraz że istnieją stany separowalne dla których  $K$ -orbity nie są symplektyczne. Proste przedłużenie rezultatów pracy [63] na dwucząstkowe stany mieszane nie jest więc możliwe. W pracy [2] pokazujemy cztery interesujące fakty, które są geometryczną i topologiczną charakteryzacją stanów  $CC$  i  $CQ$ : (1) domknięcie zbioru symplektycznych orbit działania  $K = SU(N_1) \times I_{N_2}$  stanowi zbiór stanów  $CQ$ , (2) domknięcie zbioru symplektycznych orbit działania  $K = SU(N_1) \times SU(N_2)$  stanowi zbiór stanów  $CC$ , (3) zbiór orbit  $K = SU(N_1) \times I_{N_2}$  mających nieznikającą charakterystykę Eulera-Poincarégo  $\chi$  stanowi zbiór stanów  $CQ$ , (4) zbiór orbit  $K = SU(N_1) \times SU(N_2)$  mających nieznikającą charakterystykę Eulera-Poincarégo  $\chi$  stanowi zbiór stanów  $CC$ .

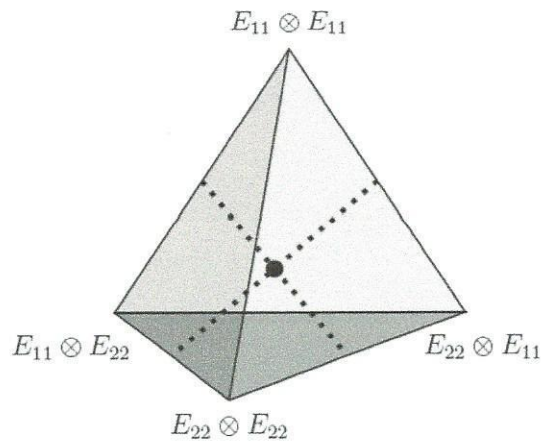
Przestrzeń wszystkich macierzy gęstości nie jest przestrzenią symplektyczną (forma symplektyczna jest zdegenerowana). Niemniej jednak zbiór macierzy gęstości o ustalonym widmie  $\mathcal{O}_\rho$ , będąc orbitą działania dołączonego  $SU(\mathcal{H})$  przez macierz  $\rho$ , już nią jest. Działanie powyższych grup  $K$  na  $\mathcal{O}_\rho$  prowadzi więc do istnienia odwzorowania momentu  $\mu : \mathcal{O}_\rho \rightarrow \mathfrak{k}$  [24]. Aby stwierdzić czy dana orbita  $K \cdot \sigma \subset \mathcal{O}_\rho$  (działanie  $K$  na  $\sigma$  jest działaniem dołączonym) jest lub nie jest symplektyczna, wystarczy rozważyć obcięcie odwzorowanie momentu  $\mu$  do  $K \cdot \rho$ . Wówczas  $K \cdot \sigma$  jest symplektyczna, jeżeli rozważane obcięcie jest bijekcją. Warunki na bijektywność odwzorowania  $\mu$  podaje twierdzenie Kostanta-Sternberga [17, 44], z którego korzystamy w pracy [2]. Zauważmy, że ponieważ orbita  $K \cdot \sigma$  jest posyłana przez  $\mu$  na orbitę dołączoną w  $\mathfrak{k}$ , to niesymplektyczność  $K \cdot \sigma$  (stopień degeneracji formy symplektycznej na  $K \cdot \sigma$ ) możemy zmierzyć jako  $D(K \cdot \sigma) = \dim K \cdot \sigma - \dim Ad_K \mu(\sigma)$ . Dla dwóch kubitów stany  $CC$ , przy ustalonej bazie, tworzą trójwymiarowy sympleks i dlatego też można w prosty sposób zobrazować, co oznacza stwierdzenie, że domknięcie zbioru orbit symplektycznych działania  $K = SU(N_1) \times SUN_2$  stanowi zbiór stanów  $CC$  (patrz rys. 5, 6 i 7). W pracy [2] dyskutujemy również istnienie struktury Kählera pokazując, że istnieje ona na wszystkich orbitach symplektycznych rozważanych grup.

Do wyznaczenia charakterystyki Eulera-Poincarégo używamy twierdzenia Hopfa-Samelsona [32]. Twierdzenie te mówi, że dla działania zwartej grupy  $K$  na rozmaitości  $M$ , charakterystyka Eulera-Poincarégo  $\chi$  orbity  $K/K_x$  przechodzącej przez punkt  $x \in M$  dana jest następująco:

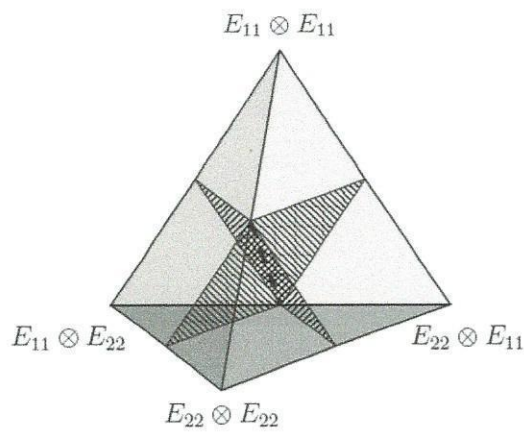
1. Jeżeli torus maksymalny  $T$  grupy  $K$  jest zawarty w  $K_x$  to  $\chi(K/K_x) = \frac{|W_K|}{|W_{K_x}|}$ , gdzie  $W_K$  i  $W_{K_x}$  są grupami Weyla grup  $K$  i  $K_x$ .
2. W przeciwnym wypadku  $\chi(K/K_x) = 0$ .

W pracy [2] pokazujemy, że orbity odpowiednich grup przez stany  $CC$  i  $CQ$  są jedynymi orbitami, których stabilizator zawiera torus maksymalny i wyznaczamy rzędy odpowiednich grup Weyla otrzymując w ten sposób  $\chi$ .



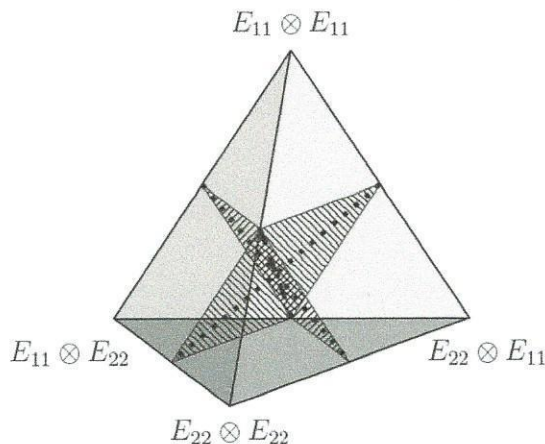


Rysunek 5: Wymiary orbit przez stany  $CC$  dla dwóch kubitów. Duża kropka:  $\dim K.\rho = 0$ ,  
linie kropkowane:  $\dim K.\rho = 2$ , poza tym:  $\dim K.\rho = 4$ .



Rysunek 6: Rząd  $\omega|_{K.\rho}$  dla dwukubitowych orbit przez stany  $CC$ . Grube linie kreskowane:  
 $\text{rk } \omega|_{K.\rho} = 0$ , zakreskowana powierzchnia:  $\text{rk } \omega|_{K.\rho} = 2$ , poza tym:  $\text{rk } \omega|_{K.\rho} = 4$ .

AS



Rysunek 7: Wymiar degeneracji  $\omega|_{K,\rho}$  dla orbit przez dwukubitowe stany  $CC$ . Grube kreskowane linie:  $D(K,\rho) = 4$ , kreskowana płaszczyzna:  $D(K,\rho) = 2$ , linie kreskowane i poza tym:  $D(K,\rho) = 0$ .

## 5 Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych (artystycznych).

Moje pozostałe osiągnięcia badawcze dotyczą: (1) teorii rozpraszania na izospektralnych grafach kwantowych, (2) klasyfikacji abelowych statystyk kwantowych na grafach kwantowych, (3) całkowalności układów hamiltonowskich o topologicznie nietrywialnej przestrzeni fazowej (4) uniwersalności w liniowej optyce kwantowej, (5) geometrycznych miar splątania kwantowego. Poniżej krótko opisuje powyższe zagadnienia.

### Teoria rozpraszania na izospektralnych grafach kwantowych

W 1966 roku Marek Kac zadał słynne pytanie „Can one hear the shape of a drum?” [35]. Pytanie to można przeformułować w sposób następujący: „Czy operator Laplace’a określony na obszarze planarnym w  $\mathbb{R}^2$  z warunkami brzegowymi Dirichleta ma unikatowe widmo?”. Pytanie to znalazło odpowiedź dopiero w 1992 roku, gdy autorzy [22] skonstruowali parę izospektralnych obszarów w  $\mathbb{R}^2$ . Graf kwantowy składa się z odcinków zwanych brzegami i wierzchołków, w których łączą się odcinki. Określając warunki brzegowe w wierzchołkach otrzymujemy samosprężony operator Laplace’a na grafie, a więc możemy zadać pytanie Kaca. W pracy [26] udowodniono, że można usłyszeć kształt grafu kwantowego, jeżeli długości jego ramion są niewspółmierne. Następnie w roku 2008 podana została [9] metoda konstrukcji izospektralnych grafów kwantowych opartą na teorii reprezentacji grup. W 2009 roku, będąc na stażu w Instytucie Weizmanna w Izraelu, zająłem się problem rozpraszania na grafach izospektralnych. Pokazałem, że macierze rozproszenia takich grafów mają identyczne widma oraz ten sam rozkład biegunów i nazwałem je grafami izorozproszeniowymi. Ponadto przedstawiłem pierwszą i jedyną do tej pory znaną metodę konstrukcji grafów izorozproszeniowych. Wyniki zostały opublikowane w pracy [10]. Weryfikacją eksperymentalną rozpraszania



na grafach izospektralnych zajęła się grupa prof. L. Sirko, z którą współpracowałem w tym zakresie [47, 48].

### Klasyfikacja abelowych statystyk kwantowych na grafach kwantowych

W 1977 roku Leinaas i Myrheim pokazali, że abelowe reprezentacje grupy fundamentalnej klasycznej przestrzeni konfiguracyjnej determinują możliwe realizacje statystyk kwantowych. Jeżeli grupa fundamentalna jest grupą permutacji to topologiczne podejście do statystyk kwantowych pokrywa się ze standardowym, mianowicie mamy dwie statystyki odpowiednio Bosego i Fermiego. W przypadku gdy wymiar przestrzeni jest równy dwa, (dla cząstek na płaszczyźnie) grupa fundamentalna nie jest grupą permutacji, tylko grupą warkoczową (braid group), która ma nieskończenie wiele elementów. Abelowa wersja tej grupy, a więc pierwsza grupa homologii jest izomorficzna z grupą liczb całkowitych, czego wyrazem jest możliwość istnienia dowolnej fazy podczas procesu wymiany cząstek. W wypadku grafów kwantowych, które są lokalnie jednowymiarowe, problem statystyk kwantowych okazuje się być niezwykle interesujący, a zarazem zdecydowanie trudniejszy. W czasie mojego pobytu na Uniwersytecie w Bristolu w okresie 10/2010-10/2013 udało mi się: (1) podać pełną klasyfikację wszystkich możliwych abelowych statystyk kwantowych na dowolnym spójnym prostym grafie (praca [28]), (2) zaproponować metodę konstrukcji dyskretnej funkcji Morse'a na 2-cząstkowych przestrzeniach konfiguracyjnych [62]. Poniżej znajduje się krótka charakteryzacja otrzymanych wyników badawczych.

Liczba faz anyonowych jest wyznaczona przez stopień spójności grafu. Dla 3-spójnych nieplanarnych grafów jedynymi możliwymi statystykami są bozony i fermiony. Dla 3-spójnych planarnych grafów istnieje dokładnie jedna faza anyonowa. Można więc powiedzieć, że z punktu widzenia topologii, z dokładnością do pierwszej grupy homologii, 3-spójne grafy zachowują się jak  $\mathbb{R}^2$ , gdy są planarne i  $\mathbb{R}^3$  w przeciwnym wypadku. Ponadto liczba faz anyonowych nie zależy od liczby cząstek dla co najmniej 2-spójnych grafów. Co ciekawe, takie grafy mogą posiadać więcej niż jedną fazę anyonową, a ich liczba, z dokładnością do pewnego kombinatorycznego składnika, jest wyznaczona przez liczbę 3-spójnych składowych w rozkładzie danego 2-spójnego grafu. Chociaż rozkład ten nie jest jednoznaczny, to liczba uzyskiwanych składowych jest zawsze taka sama. Dla 1-spójnych grafów statystyki kwantowe zależą od liczby cząstek w układzie. Wszystkie te rezultaty otrzymano dzięki opracowaniu nowego zbioru metod obliczania grup homologii, który łączy ze sobą pewne znane fakty z teorii grafów, dyskretnej teorii Morse'a i przykładowe obliczenia dla pewnych małych grafów. Rezultaty prac [28] i [62] opublikowanych w *Communications in Mathematical Physics* i *Journal of Physics A* stały się podstawą rozprawy doktorskiej z matematyki obronionej przeze mnie w 2014 roku na Uniwersytecie w Bristolu.

### Całkowalność układów hamiltonowskich o topologicznie nietrywialnej przestrzeni fazowej

W teorii chaosu kwantowego pojawia się problem wykazania, że granica klasyczna układu kwantowo chaotycznego jest klasycznie chaotyczna. Pierwszym krokiem byłoby więc wykazanie, że jest ona niecałkowalna. W pracy [60], która była podstawą mojej pracy magisterskiej obronionej w lutym 2010 roku na Uniwersytecie Warszawskim przedstawiłem pierwszy ana-



lityczny dowód niecałkowalności pewnego układu hamiltonowskiego posiadającego symetrię grupy  $SU(3)$ , będącego granicą klasyczną układu, który jest kwantowo chaotyczny. Układ ten określony był na przestrzeni dualnej do algebry Liego  $\mathfrak{su}(3)$ , która w naturalny sposób jest rozmaitością Poissona. Aby udowodnić niecałkowalność użyłem niedawno rozwiniętej teorii Moralesa-Ramisa [51] opartej na różniczkowej teorii Galois. Równania Hamiltona są równaniami cząstkowymi. Aby zastosować różniczkową teorię Galois należy znaleźć stowarzyszone z nimi równanie różniczkowe zwyczajne. W krótkich słowach problem sprowadzał się do znalezienia szczególnego rozwiązania wspomnianego układu hamiltonowskiego, a następnie jego linearyzacji wokół tego rozwiązania. Teoria Moralesa-Ramisa zapewnia, że jeżeli ten zlinearyzowany układ równań różniczkowych zwyczajnych nie ma abelowej grupy Galois, to wyjściowy układ hamiltonowski nie jest całkowalny. W pracy [60] wykazałem, że dla rozważanej przeze mnie linearyzacji różniczkowa grupa Galois nie jest rozwiązalna, a więc w szczególności nie jest abelowa.

### Uniwersalność w liniowej optyce kwantowej

Jednym z podstawowych, z punktu widzenia zastosowań w informatyce kwantowej, problemów w liniowej optyce kwantowej jest konstrukcja  $n$ -modowych bramek. Około 20 lat temu autorzy [59] pokazali, że mając do dyspozycji wszystkie możliwe bramki 2-modowe oraz bramki fazowe można z ich pomocą skonstruować dowolną bramkę  $n$ -modową. Rezultat ten ma ograniczone znaczenie praktyczne, ponieważ typowo mamy dostęp tylko do kilku ustalonych typów bramek optycznych, z których chcemy budować kolejne. Matematycznie problem sprowadza się więc do wyznaczenia zbioru generowanego przez kilka elementów określonej grupy Liego. Jeżeli zbiór ten jest gęstym podzbiorem danej grupy, to mówimy, że jest on uniwersalny. Zbiór uniwersalny to więc taki zbiór, który umożliwia budowę dowolnej bramki optycznej z dowolną dokładnością. W pracy [65] zajmuję się problemem generowania grup  $SO(N)$  w wypadku gdy mamy do dyspozycji tylko jedną bramkę optyczną operującą na dwóch lub trzech modach, a więc należąca do grupy  $SO(2)$  lub  $SO(3)$ . Używając narzędzi teorii sterowania pokazuję, że nietrywialna 2-modowa bramka jest zawsze uniwersalna. Podobnie jest dla większości bramek 3-modowych.

### Geometryczne miary splątania kwantowego

Separowalność wielocząstkowego stanu kwantowego pozostaje niezmiennicza ze względu na działanie pewnej klasy transformacji dozwolonych przez mechanikę kwantową. Z matematycznego punktu widzenia sytuacja ta może zostać opisana przez działanie pewnej zwartej grupy Liego  $K$  na rozmaitości  $M$ . Rozważana rozmaitość zależy oczywiście od konkretnej sytuacji fizycznej. Przykładowo, dla stanów czystych jest to zespolona przestrzeń rzutowa  $M = \mathbb{P}(\mathcal{H})$ . Rozmaitość  $M$  wyposażona jest w strukturę symplektyczną indukowaną przez naturalną strukturę symplektyczną istniejącą na każdej zespolonej przestrzeni Hilberta. Orbitsy działania grupy  $K$  na  $M$ , będąc podrozmaitościami  $M$ , mogą także, pod pewnymi warunkami, odziedziczyć strukturę symplektyczną, a nawet być zgodne z zespoloną strukturą przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}$ . W pracy opublikowanej w *Communications in Mathematical Physics* [63], która była podstawą mojej rozprawy doktorskiej obronionej w 2011 roku na Uniwersytecie Warszawskim, pokazano, że stopień splątania kwantowego między poszczególnymi po-

duktadami może zostać ilościowo scharakteryzowany poprzez wymiar przestrzeni degeneracji kanonicznej formy symplektycznej na zespolonej przestrzeni rzutowej ograniczonej do orbit lokalnego, a więc zachowującego splatanie, działania unitarnego. Praca [61] jest kontynuacją pracy [63] i podano w niej dokładną charakteryzację niskowymiarowych orbit lokalnego unitarnego działania oraz pokazano, że generyczna orbita tego działania jest koizotropowa dla układu dwóch identycznych cząstek rozróżnialnych.

## Literatura

- [1] T. Maciążek, A. Sawicki, Critical points of the linear entropy for pure L-qubit states J. Phys. A: Math. Theor. 48 045305, 2015
- [2] M. Oszmaniec, P. Suwara, A. Sawicki, Geometry and topology of CC and CQ states, J. Math. Phys. 55, 06220, 2014
- [3] A. Sawicki, M. Oszmaniec, M. Kuś, Convexity of momentum map, Morse index, and quantum entanglement Reviews in Mathematical Physics, 26, 1450004, 2014
- [4] T. Maciążek, M. Oszmaniec, A. Sawicki, 2013, How many invariant polynomials are needed to decide local unitary equivalence of qubit states?, J. Math. Phys. 54, 092201, 2014
- [5] A. Sawicki A., V. V. Tsanov, A link between quantum entanglement, secant varieties and sphericity, J. Phys. A: Math. Theor. 46 265301, 2013
- [6] A. Huckleberry, M. Kuś, A. Sawicki, Bipartite entanglement, spherical actions and geometry of local unitary orbits, J. Math. Phys. 54, 022202, 2013
- [7] D. Akhiezer and E. B. Vinberg, Weakly symmetric spaces and spherical varieties, Trans. Groups 4, 3–24, 1999
- [8] M. F. Atiyah, Convexity and commuting Hamiltonians, Bull. London Math. Soc. 14, 1–15, 1982
- [9] R. Band, O. Parzanchevski, and G. Ben-Shach, The isospectral fruits of representation theory: Quantum graphs and drums, J. Phys. A: Math. Theor., vol. 42, p. 175202, 2009
- [10] R. Band, A. Sawicki A., U. Smilansky, Scattering from isospectral quantum graphs. J. Phys. A: Math. Theor. 43 415201, 2010
- [11] A. Barut and B. Rączka, Theory of group representations and applications, PWN, Warszawa, 1980
- [12] Bredon, G. E., Introduction to compact transformation groups, Pure and Applied Math. 46, Academic Press, 1972
- [13] M. Brion, Sur l'image de l'application moment, Lect. Notes Math. 1296, 177–192, 1987
- [14] J. Buczyński and J. M. Landsberg, Rank of tensors and a generalization of secant varieties, Linear Algebra Appl. 438, no. 2, 668–689, 2013
- [15] E. Carlini, M. V. Catalisano, A. V. Geramita, The solution of the Waring problem for monomials and the sum of coprime monomials, J. Algebra 370, 5–14, 2012
- [16] L. Chen, D. Z Djokovic, M. Grassl, B. Zeng, Canonical form of three-fermion pure-states with six single particle states, J. Math. Phys. 55, 082203, 2014
- [17] D. Chruściński, Symplectic orbits in quantum state space, J. Math. Phys. 31 1587, 1990
- [18] G. Comas, M. Seiguer, On the rank of a binary form, Found. Comput. Math. 11 , p. 65–78, 2011
- [19] A. Datta, Condition for the Nullity of Quantum Discord, arXiv:1003.5256, 2011
- [20] W. Dür, G. Vidal, and J. I. Cirac, Three qubits can be entangled in two inequivalent ways, Phys. Rev. A 62, 062314, 2000
- [21] A. Ferraro, L. Aolita, D. Cavalcanti, F. M. Cucchietti, and A. Acín ,Almost all quantum states have nonclassical correlations, Phys. Rev. A 81, 052318, 2010
- [22] C. Gordon, D. Webb, and S. Wolpert, One cannot hear the shape of a drum, Bull. Am. Math. Soc., vol. 27, pp. 134–38, 1992
- [23] V. Guillemin and R. Sjamaar, Convexity theorems for varieties invariant under a Borel subgroup, Pure Appl. Math. Q. 2, no. 3, 637–653, 2006
- [24] V. Guillemin and S. Sternberg, *Symplectic techniques in physics*, Cambridge University Press, Cambridge ,1984
- [25] V. Guillemin, S. Sternberg, Convexity properties of the moment mapping, Invent. Math. 67, 491513, 1982
- [26] B. Gutkin and U. Smilansky, Can one hear the shape of a graph?, J. Phys. A, vol. 34, p. 6061, 2001
- [27] B. C. Hall, Lie groups, Lie algebras, and representations, an elementary introduction, Springer, New York, 2003
- [28] J. Harrison, J. Keating, J. Robbins, A. Sawicki, n-Particle Quantum Statistics on Graphs, Commun. Math. Phys. 330, 1293–1326, 2014





- [29] P. Heinzner, A. Huckleberry, Kählerian potentials and convexity properties of the moment map, *Invent. Math.* 126, 6584, 1996
- [30] L. Henderson and V. Vedral, Classical, quantum and total correlations, *Journal of Physics A* 34, 6899, 2001
- [31] A. Higuchi, A. Sudbery, J. Szulc, One-qubit reduced states of a pure many-qubit state: polygon inequalities, *Phys. Rev. Lett.* 90, 107902, 2003
- [32] H. Hopf, H. Samelson, Ein Satz über die Wirkungsräume geschlossener Liescher Gruppen, *Comment. Math. Helv.* 13, 240, 251 (German), MR 0006546, 1941
- [33] R. Horodecki et. al., Quantum entanglement, *Rev. Mod. Phys.* 81, 865942, 2009
- [34] A. T. Huckleberry and T. Wurzbacher, Multiplicity-free complex manifolds, *Mathematische Annalen* 286, 261–280, 1990
- [35] M. Kac, Can one hear the shape of a drum?, *Am. Math. Mon.*, 73,1–23, 1966
- [36] V. Kac, Some remarks on nilpotent orbits, *J. of Algebra* 64, 190–213, 1980
- [37] G. Kempf, L. Ness, The lengths of vectors in representation spaces, *Lectures Notes in Mathematics*, 732, 233–243, 1982
- [38] F. C. Kirwan, Convexity properties of the moment mapping, *Invent. Math.* 77, 547552, 1984
- [39] F. C. Kirwan, *Cohomology of Quotients in Symplectic and Algebraic Geometry*, *Mathematical Notes* 31, Princeton, NJ: Princeton University Press, 1982
- [40] A. Klyachko, Quantum marginal problem and representation of the symmetry group, arXiv:quant-ph/0409113, 2004
- [41] A. Klyachko, Dynamic symmetry approach to entanglement, *Proceedings of the NATO Advanced Study Institute on Physics and Theoretical Computer Science*, IOS Press, Amsterdam, 2007
- [42] F. Knop, Some remarks on multiplicity free spaces, *Representation theories and algebraic geometry (Montreal, PQ, 1997)*, 301317, *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, Vol. 514, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998
- [43] J. K. Korbicz, P. Horodecki, R. Horodecki, Quantum-correlation breaking channels, broadcasting scenarios, and finite Markov chains, *Phys. Rev. A* 86, 042319, 2012
- [44] B. Kostant and S. Sternberg, *Symplectic projective orbits. New directions in applied mathematics, papers presented April 25/26, 1980, on the occasion of the Case Centennial Celebration (Hilton, P. J. and Young, G. S., eds.)* New York: Springer, 81–84, 1982
- [45] B. Kraus, Local Unitary Equivalence of Multipartite Pure States, *Phys. Rev. Lett.* 104, 020504, 2010
- [46] J. M. Landsberg, *Tensors: Geometry and Applications*, AMS, Providence, RI, 2012
- [47] M. Ławniczak, A. Sawicki, S. Bauch, M. Kuś, L. Sirko, Resonances and poles in isoscattering microwave networks and graphs, *Phys. Rev. E* 89, 032911, 2014
- [48] O. Hul, M. Ławniczak, S. Bauch, A. Sawicki, M. Kuś, L. Sirko, Are scattering properties of graphs uniquely connected to their shapes?, *Phys. Rev. Lett.* 109, 040402, 2012
- [49] E. Meinrenken, C. Woodward, Moduli spaces of flat connections on 2-manifolds, cobordism, and Witten’s volume formulas, *Advances in geometry*, *Progr. Math.* 172, 271–295, 1999
- [50] J. S. Milne, *Algebraic geometry*, Taiaroa Publishing Erehwon, Version 5.00, 2005
- [51] J. J. Morales-Ruiz, *Differential Galois Theory and Non-Integrability of Hamiltonian Systems*, Birkhauser, Basel, 1999
- [52] S. Mukai, *An Introduction to Invariants and Moduli*, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, No. 81, 2003
- [53] D. Mumford, *Stability of projective varieties*, *L’Enseignement Mathématique*, 1977
- [54] L. Ness, A stratification of the null cone via the moment map [with an appendix by D. Mumford], *Amer. J. Math.* 106(6), 1281–1329, 1984
- [55] M.A Nielsen and I.L Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000
- [56] H. Ollivier and W. H. Zurek, Quantum Discord: A Measure of the Quantumness of Correlations, *Physics Review Letters* vol. 88, 01790, 2001
- [57] M. Oszmaniec and M. Kuś, On detection of quasiclassical states, *J. Phys. A* 45, 244034, 2012
- [58] A. M. Perelomov, *Generalized Coherent States and Their Applications*, Springer, Berlin, 1986
- [59] M. Reck, A. Zeilinger, H. J. Bernstein, P. Bertani, Experimental realization of any discrete unitary operator, *Physical Review Letters*, 73(1):58–61, 1994.
- [60] A. Sawicki, M. Kuś, Classical nonintegrability of a quantum chaotic SU(3) Hamiltonian system, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 239 719–726, 2010
- [61] A. Sawicki, M. Kuś, Geometry of the local equivalence of states, *J. Phys. A: Math. Theor.* 44 49530, 2011
- [62] A. Sawicki, Discrete Morse functions for graph configuration spaces, *J. Phys. A: Math. Theor.* 45 505202, 2012
- [63] A. Sawicki, A. Huckleberry, and M. Kuś, Symplectic geometry of entanglement. *Comm. Math. Phys.*, 305(2):441–468, 2011



- [64] A. Sawicki, M. Walter, M. Kuś, When is a pure state of three qubits determined by its single-partite reduced density matrices?, *J. Phys. A: Math. Theor.* **46**, 055304, 2013
- [65] A. Sawicki, Universality of beamsplitters, *Quantum Information and Computation* **16**, 3 and 4, 0291-0312, 2016
- [66] A. Sudbery, On local invariants of pure three-qubit states, *J. Phys. A* , **34**, 643, 2001
- [67] F. Verstraete, J. Dehaene, and B. De Moor, Normal forms and entanglement measures for multipartite quantum states, *Phys. Rev. A* **68**, 012103, 2003
- [68] G. Vidal, Entanglement monotones, *Journal of Modern Optics* **47**, 1999
- [69] P. Vrana, Local unitary invariants for multipartite quantum systems, *J. Phys. A* **44**, 115302, 2011
- [70] M. Walter, B. Doran, D. Gross, and M. Christandl, Entanglement Polytopes, *Science* **340**, 1205, 2013

23.03.2016

Adam Sawicki