

Załącznik 2

1. Imię i nazwisko: Gniewomir Sarbicki

2. Posiadane dyplomy, stopnie naukowe

- a) Tytuł rozprawy: *Geometryczne własności zbioru stanów separowalnych i świadków splątania*
Promotor: dr hab. A. Jamiołkowski
- b) 2005 r. Magister matematyki teoretycznej, Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń
Tytuł pracy: *Rozwiązania okresowe wahadła sprzężonego*
Promotor : prof. dr hab. S. Rybicki
- c) 2004 r. Magister fizyki teoretycznej, Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń
Tytuł pracy: *Opis geometryczny trzech qubitów*
Promotor: dr hab. A. Jamiołkowski

3. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych

- a) 2012-2015 r.
Adiunkt, Instytut Fizyki, Wydział Fizyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika
- b) 2011-2012 r.
Postdoc Stockholms Universitet
- c) 2008-2011 r.
Asystent, Instytut Fizyki, Wydział Fizyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika

4. Nagrody

- Zespołowa nagroda rektora UMK II stopnia (2012)
- Zespołowa nagroda rektora UMK I stopnia (2013)

5. Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, p oz. 595 ze zm.):

- a) Tytuł osiągnięcia naukowego *Geometryczne własności stożków w mechanice kwantowej - optymalność i eksponowaność świadków splątania*
- b) Wykaz publikacji wchodzących w skład osiągnięcia

- [W1] Dariusz Chruscinski, Justyna Pytel, Gniewomir Sarbicki *Constructing new optimal entanglement witnesses* Phys. Rev. A 80, 062314 (2009)
Swój wkład oceniam na 30%, moim wkładem było udowodnienie dodatniości odwzorowania użytego do konstrukcji świadków
- [W2] Remigiusz Augusiak, Gniewomir Sarbicki, Maciej Lewenstein *Optimal decomposable witnesses without the spanning property* Physical Review A 84, 052323 (2011)
Swój wkład oceniam na 25%, moim wkładem było uogólnienie przykładu w 3×3 do $n \times m$ i pomocy w redagowaniu pracy.
- [W3] Dariusz Chruściński, Gniewomir Sarbicki *Exposed positive maps: a sufficient condition* J. Phys. A: Math. Theor. 45 (2012) 115304
Swój wkład oceniam na 40%, moim wkładem było zastosowanie kryterium do odwzorowań pochodzących od transpozycji.
- [W4] Gniewomir Sarbicki, Dariusz Chruściński *A class of exposed indecomposable positive maps* J. Phys. A: Math. Theor. 46 015306 arXiv:1201.5995 (2013)
Swój wkład oceniam na 80%, moim wkładem było zastosowanie kryterium eksponowalności do klasy odwzorowań będących tematem pracy.
- [W5] Dariusz Chruściński, Gniewomir Sarbicki *Exposed positive maps in $M_4(\mathbb{C})$* Open Sys. Inf. Dyn. 19 (3) 1250017 (2012)
Swój wkład oceniam na 50%. Moim wkładem było zastosowanie kryterium eksponowalności do odwzorowań będących tematem pracy.
- [W6] D.Chruściński, G.Sarbicki *Optimal entanglement witnesses for two qutrits* Open Sys. Information Dyn. 20 (2) 1350006 (2013)
Swój wkład oceniam na 50%, moim wkładem było znalezienie ogólnej postaci wektorów napinających dla tej rodziny świadków.
- [W7] Dariusz Chruściński, Gniewomir Sarbicki *Disproving the conjecture on structural physical approximation to optimal decomposable entanglement witnesses* J. Phys. A: Math. Theor. 47, 195301 (2014)
Swój wkład oceniam na 50%. Moim wkładem było zastosowanie kryterium realignmentu do zaproponowanej klasy i analityczny dowód jego łamania.
- [W8] Dariusz Chruściński, Gniewomir Sarbicki *Entanglement witnesses: construction, analysis and classification* J. Phys. A: Math. Theor. 47, 483001 (2014)
Swój wkład oceniam na 20%, moim wkładem były fragmenty o geometrii stożków i o nierównościach Bella

[W9] A.Rutkowski, G.Sarbicki, D.Chruściński *A class of bistochastic positive optimal maps in $M_d(\mathbb{C})$* Open Sys. Inf. Dyn. 22 (3) 1550016 (2015)
Swój wkład oceniam na 30%, moim wkładem było udowodnienie optymalności odwzorowań będących tematem pracy.

- c) Omówienie celu naukowego ww. prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania.

W dalszej części autoreferatu referencje [W1]-[W9] odnoszą się do prac należących do cyklu publikacji stanowiącego podstawę wniosku habilitacyjnego.

Wstęp geometryczny

Zbiory stanów i zbiory obserwabli w mechanice kwantowej, które mają interesujące własności informacyjne są w większości przypadków *stożkami* lub różnicami stożków. Stożkiem K nazywamy domknięty podzbiór rzeczywistej przestrzeni liniowej faktoryzujący się przez półproste ($x \in K \Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \lambda x \in K$). Półprostą przechodzącą przez punkt x nazywamy *promieniem* tego punktu. Stożek jest zamknięty na branie kombinacji liniowych elementów, o dodatnich współczynnikach.

W stożku możemy wyróżnić kratę podzbiorów nazywanych *ścianami*. Ściana F to podzbiór stożka o własności, że biorąc dowolne $x, y \in K$, jeżeli $x \in F \wedge x - y \in K$ to $y \in F$. Ściana jest zamknięta na branie kombinacji liniowych elementów, o dodatnich współczynnikach, więc sama jest stożkiem. Przecięcie dwóch ścian jest też ścianą, zatem możemy określić minimalną ścianę zawierającą dany element i nazywamy ją *ścianą generowaną przez element*.

Założmy, że przedstawiamy element x stożka K jako kombinację liniową innych elementów stożka K , o dodatnich współczynnikach. Jeżeli jedynymi takimi rozkładami są rozkłady na elementy promienia punktu x , to punkt x nazywamy *punktem ekstremalnym* w K .

Dla stożka K w przestrzeni X rozważać można podzbiór przestrzeni X^* wszystkich form przyjmujących na elementach K wartości nieujemne. Zbiór ten okazuje się być stożkiem, nazywamy go stożkiem dualnym do K i oznaczamy jako K^* . W naszych rozważaniach ograniczymy się do przypadku gdy $X = X^{**}$, zatem mamy $K^{**} = K$.

Dla elementu x stożka K można zapytać jakie elementy K^* zerują się na nim. Okazuje się, że tworzą one ścianę w K^* , nazywaną *ścianą dualną* do elementu x . Co więcej, dwa elementy generujące tę samą ścianę mają tę samą ścianę dualną, dlatego dualność odwzorowuje kratę ścian stożka K w kratę ścian stożka K^* . Oznaczmy te odwzorowanie jako Φ . W taki sam sposób konstruujemy odwzorowanie Φ^* przypisujące ścianom stożka K^* ściany stożka $K^{**} = K$. Odwzorowanie $\Phi^*\Phi$ przypisuje ścianie stożka K jego pewną nadścianę. Ściany przechodzące w takiej operacji na same siebie nazywamy *ścianami eksponowanymi*.

W szczególności, eksponowane ściany jednowymiarowe nazywamy *promieniami eksponowanymi*, a elementy takich promieni nazywamy *punktami eksponowanymi*.

Podzbiory stanów i obserwabli będące przedmiotem zainteresowania

Rozważać będziemy zbiór normalnych stanów kwantowych (operatorów gęstości). Są to operatory śladowe, samosprężone, półdodatnio określone, o śladzie równym 1. Dla wygody rezygnujemy z warunku normowania śladu i przedmiotem zainteresowania jest stożek operatorów śladowych, samosprężonych, dodatnio określonych.

Jeżeli w układzie można wyróżnić dwa podukłady, nazwijmy je A i B , to przestrzeń Hilberta układu jest iloczynem tensorowym przestrzeni Hilberta podukładów $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Dla części stanów układu istnieją rozkłady postaci $\rho = \sum_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B$, gdzie $\rho_i^A \in \mathbb{B}_1(\mathcal{H}_A)$, $\rho_i^B \in \mathbb{B}_1(\mathcal{H}_B)$ są stanami odpowiednio podukładów A i B [1] (przy czym rozkład ten nie musi być jednoznaczny). Te szczególne stany nazywamy stanami separowalnymi. Tworzą one stożek, który jest podzbiorem stożka wszystkich stanów. Stany w różnicy tych stożków nazywa się stanami splątanymi. Dowolny stan klasyczny układu złożonego można wyprodukować jako mieszaninę statystyczną stanów produktowych. Z definicji, w ten sposób nie da się skonstruować stanu splątanego, zatem korelacje pomiędzy podukładami w takich stanach są nieklasyczne. Korelacje te znajdują zastosowanie w dużej liczbie kwantowych protokołów komunikacyjnych (teleportacja, kryptografia), są też zasobem obliczeniowym dla komputerów kwantowych.

Najczęściej z punktu widzenia zastosowań interesują nas stany splątane pomiędzy obiektami rozseparowanymi przestrzennie. Stan splątany dwóch cząstek, jedna w punkcie A , druga w punkcie B uzyskujemy z pewnego źródła par cząstek. Chcemy zbadać splątanie stanu pary cząstek.

Dla zadanego stanu, problem stwierdzenia czy jest to stan splątany czy separowalny jest trudny [2, 3]. Jest to równoważne sprawdzeniu, czy dla badanego stanu wartość oczekiwana wszystkich obserwabli dodatnich na stanach czystych produktowych jest w badanym stanie nieujemna [4]. Obserwable takie tworzą stożek, który będziemy oznaczać w dalszej części referatu jako $\mathcal{W}_1$, będący nadstożkiem stożka obserwabli półdodatnio określonych ($\mathcal{B}_+$). Z definicji stożek $\mathcal{W}_1$ jest dualny do stożka $\mathcal{B}_1$.

Elementy zbioru $\mathcal{W}_1 \setminus \mathcal{B}_+$ (obserwable dodatnie na stanach produktowych, ale nie półdodatnio określone) nazywają się świadkami splątania. Jeżeli wartość oczekiwana świadka w pewnym stanie splątanym jest ujemna, to mówimy że jest to stan splątany wykrywany przez świadka. Każdemu świadkowi możemy zatem przypisać zbiór stanów splątanych przez niego wykrywanych.

Istnieje kilka kryteriów splątania, które pozwalają wykryć splątanie dla explicite zada-

nej macierzy gęstości układu złożonego. Z najważniejszych należy wymienić kryterium częściowej transpozycji [5] i kryterium realignmentu [6]¹. Odpowiadają one całym rodzinom świadków splątania. W praktyce, ich użycie wymagałoby znajomości wszystkich elementów macierzy gęstości (pełna tomografia stanu) z dużą dokładnością przy założonym poziomie ufności, co wiąże się z przeprowadzeniem dużej liczby pomiarów. Ponieważ często wiele wiemy o stanie z samej fizyki źródła, możemy skonstruować świadka którego ujemny wynik zapewni nas o splątaniu par cząstek pochodzących ze źródła (czyli potwierdzi skuteczność takich par cząstek do protokołów kwantowych). Wartość liczbowa wartości oczekiwanej świadka (odpowiednio znormalizowanego) jest również miarą jakości splątania. Pomiar wartości oczekiwanej z zadaną dokładnością odbywa się przez jej wielokrotny pomiar i uśrednianie. Pomiar pojedynczej obserwabli należy zatem rozumieć jako serię pomiarów przy tych samych ustawieniach przyrządów. Warto wspomnieć, że ponieważ świadek jest obserwabla na układzie złożonym z rozseparowanych przestrzennie podukładów, nie istnieje przyrząd pomiarowy mu odpowiadający. Świadka należy rozłożyć na kombinację liniową iloczynów tensorowych lokalnych obserwabli i dokonać wielokrotnego pomiaru każdego ze składników rozkładu. W ten sposób rekonstruujemy wartość oczekiwaną świadka. Tak samo postępujemy mierząc łamanie nierówności Bella, co nie jest niczym zaskakującym, ponieważ każda nierówność Bella tłumaczy się na świadka splątania, a dokładniej odpowiada całej klasie świadków splątania odpowiadającym różnym wyborom lokalnych obserwabli w nierówności Bella (taką klasę równoważności nazywamy *Device Independent Witness*, [W8] i referencje tam).

Kryterium częściowej transpozycji pełni wyróżnioną rolę - przez długi czas jedynymi konstruowanymi doświadczalnie stanami były stany wykrywane przez te kryterium. Stany splątane nie wykrywane przez kryterium częściowej transpozycji, nazywane stanami splątanymi PPT, mają interesujące własności fizyczne - ich splątanie jest tzw. splątaniem związanym (czy istnieją stany splątane nie PPT o tej własności jest nadal pytaniem otwartym, do tej pory nie znaleziono przykładów). Stany PPT również tworzą stożek który będziemy oznaczać jako $\mathcal{B}_{PPT}$, będący przekrojem stożka $\mathcal{B}_+$ i jego obrazu pod działaniem częściowej transpozycji. Stożek do niego dualny to otoczka wypukła sumy stożka $\mathcal{W}_1$ i jego obrazu pod działaniem częściowej transpozycji. Oznaczać go będziemy jako $\mathcal{W}_D$. Jego niedodatnie elementy nazywamy *świadkami rozkładalnymi*. Świadców ze zbioru $\mathcal{W}_1 \setminus \mathcal{W}_D$ nazywamy *świadkami nierozkładalnymi*.

¹W praktyce przy sprawdzaniu splątania numerycznie stosuje się algorytm oparty na kryterium Doherty'ego [7, 8], ale przy analitycznym udowadnianiu splątania w klasach stanów wykorzystuje się kryterium częściowej transpozycji, a dla stanów nie wykrywanych przez to kryterium (nazywanych stanami PPT) w przypadku generycznym wykorzystuje się kryterium realignmentu i jego wzmocnienia

Optymalność i napinanie

W stożku świadków splątania można wyróżnić elementy optymalne - które wykrywają maksymalne (w sensie inkluzji) zbiory stanów splątanych. Z punktu widzenia zastosowań, używanie świadków nieoptymalnych nie ma sensu - optymalizując świadka nieoptymalnego nie tracimy już wykrywanych stanów, a poszerzamy zakres stosowalności naszego narzędzia.

Równoważną definicją optymalności jest warunek, by świadek po odjęciu dowolnej obserwabli dodatniej przestawał być świadkiem [9].

Istnieje prosty warunek wystarczający na optymalność świadka splątania - jeżeli zbiór wektorów $\{\alpha \otimes \beta : \langle \alpha \otimes \beta | W | \alpha \otimes \beta \rangle = 0\}$ napina całą przestrzeń Hilberta układu, to świadek W jest optymalny [9]. Krótko nazywamy takich świadków *napinającymi* lub *o własności napinania*.

Kryterium napinania użyliśmy do udowodnienia optymalności klas świadków [W1], [W9]. W pracy [W2] konstruujemy świadka rozkładalnego, optymalnego bez własności napinania dla dowolnych wymiarów podukładów, większych od 2. Jego optymalność udowadniamy wprost z definicji.

Praca [9] która wprowadza definicje optymalności i napinania, definiuje również ND-optymalność, znaną w późniejszej literaturze również jako biooptymalność. Świadek nierozkładalny jest ND-optymalny, jeżeli żaden inny świadek nie wykrywa więcej (w sensie inkluzji) stanów splątanych PPT. Okazuje się to być równoważne stwierdzeniu, że świadek taki po odjęciu dowolnego świadka rozkładalnego przestaje być świadkiem. Warunkiem wystarczającym ND-optymalności jest by zarówno świadek jak i jego częściowa transpozycja miały własność napinania.

W pracy [W10] sformułowałem geometryczną interpretację optymalności. Optymalność można definiować dla dowolnych dwóch stożków K i L spełniających relację inkluzji $K \subset L$ - element $L \setminus K$ jest optymalny wtedy i tylko wtedy gdy żaden inny element $L \setminus K$ nie wykrywa więcej elementów $K^* \setminus L^*$ (w sensie inkluzji). W przypadku stożków $\mathcal{B}_+$, $\mathcal{W}_1$ otrzymujemy standardową optymalność. Biorąc stożki $\mathcal{W}_D$ i $\mathcal{W}_1$ otrzymujemy ND-optymalność. W ogólnym przypadku daje się udowodnić równoważną definicję optymalności - element $w \in L \setminus K$ jest optymalny wtedy i tylko wtedy gdy $\forall k \in K \setminus \{0\}, w - k \notin L$.

Optymalność jest własnością całych ścian stożka L . Udowodniłem, że element jest optymalny, wtedy i tylko wtedy gdy jeżeli najmniejsza ściana która go zawiera nie zawiera elementów podstożka K . Obecnie, ścianowa definicja optymalności jest podawana jako wyjściowa definicja [10].

Podobnie można scharakteryzować zbiór świadków napinających - element ma własność napinania, jeżeli najmniejsza ściana eksponowana która go zawiera nie zawiera elementów

podstożka K . Ogólne kryterium napinania dla dowolnych stożków implikuje jako swoje przypadki szczególne, kryteria napinania standardowej optymalności i ND-optymalności. Charakteryzacja geometryczna optymalności i napinania daje odpowiedź na pytanie kiedy te dwa warunki stają się równoważne. Dzieje się tak, gdy większy ze stożków ma wszystkie ściany eksponowane. Stożek $\mathcal{W}_1$ nie posiada tej własności, przykładem jest świadek pochodzący przez izomorfizm Jamiołkowskiego z odwzorowania Choi, który jako ekstremalny jest optymalny, ale nie ma własności napinania. Stożkami o wszystkich ścianach eksponowanych są np. stożki samodualne lub stożki polihedralne powstałe z przecięcia skończonej liczby półprzestrzeni.

Geometryczna charakteryzacja optymalności i napinania pozwala reformułować te pojęcia dla dowolnej pary stożków. W mechanice kwantowej wielu cząstek może być to wykrywanie różnych typów splątania, w stożkach prawdopodobieństw warunkowych rozważanych w zagadnieniach kwantowego sterowania, wykrywania korelacji niekwantowych wśród korelacji nieinformujących itp.

Eksponowość

Jeżeli pytamy nie o możliwość poprawienia konkretnego eksperymentu, ale o minimalny zbiór świadków wykrywających każde splątanie, to pytamy o elementy ekstremalne w stożku świadków - elementy, które nie dadzą się przedstawić jako kombinacja wypukła dwóch innych elementów spoza promienia generowanego przez punkt. Wśród nich mamy podzbiór punktów eksponowanych - są to punkty leżące na promieniach, które są przecięciem stożka z pewną hiperłaszczyzną styczną do stożka. Twierdzenie Straszewicza [11] mówi, że elementy eksponowane tworzą gęsty podzbiór w zbiorze elementów ekstremalnych. Oznacza to (z ciągłości), że jeżeli stan splątany jest wykrywany przez pewnego świadka ekstremalnego, to jest wykrywany przez bliskiego mu świadka eksponowanego. Świadcowie eksponowani są w stanie wykryć splątanie każdego stanu.

W pracy [W3] sformułowaliśmy kryterium eksponowości, podobne do kryterium napinania dla optymalności - jeżeli zbiór wektorów $\{\alpha^* \otimes \alpha \otimes \beta : \langle \alpha \otimes \beta | W | \alpha \otimes \beta \rangle = 0\}$ napina przestrzeń o wymiarze $d_1^2 d_2 - d_1$ (własność tę nazwaliśmy *silnym napinaniem*) i dodatkowo odwzorowanie odpowiadające świadkowi jest nieredukowalne, to świadek jest eksponowany. Świadców takich nazywamy *silnie napinającymi* lub o *silnej własności napinania*. Używając tego kryterium udało nam się udowodnić eksponowość (a zatem również ekstremalność) dla klasy świadków w parzystych wymiarach [W4], o których do tychczas wiedzieliśmy tylko że są optymalne [W5].

Kryterium to jest relatywnie słabe, tzn. łatwo jest podać konstrukcję świadka eksponowanego, który nie ma własności silnego napinania. W pracy [W3] pokazujemy, że wszystkie

częściowe transpozycje projektorów, które są eksponowane [12] nie mają własności silnego napinania jeżeli wymiary podukładów nie są równe.

Hipoteza SPA

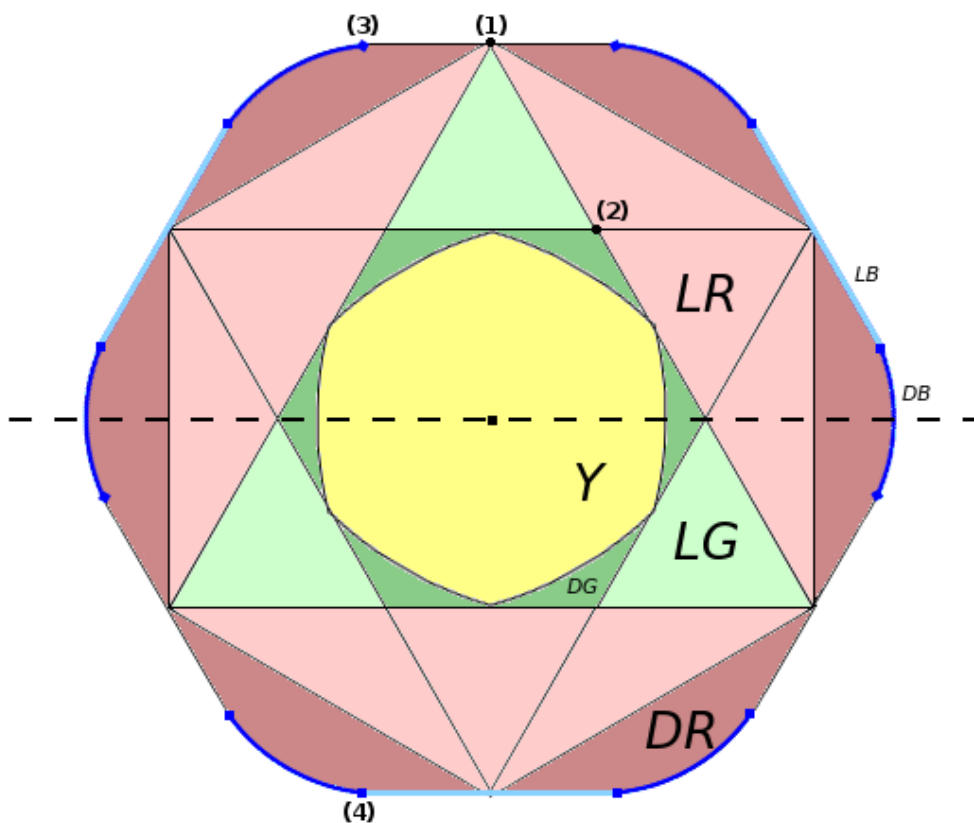
W pracy [13] P. Horodecki i A. Ekert sformułowali hipotezę SPA (Structural Physical Approximation) o strukturalnych aproksymacjach fizycznych świadków splątania. $SPA(W)$ definiujemy jako stan $SPA(W) = W + \lambda \rho_0$, gdzie $\lambda = \min\{\lambda : W + \lambda I \geq 0\}$, a ρ_0 jest stanem maksymalnie mieszanym. Hipoteza SPA mówi, że dla świadków optymalnych $SPA(W)$ jest zawsze stanem separowalnym. Hipoteza ta została poparta bardzo wieloma przykładami znanych świadków [14]. Ma ona istotne praktyczne implikacje dla procedur pomiaru świadków optymalnych [14]. W [15] został podany świadek nierozkładalny będący kontrprzykładem i hipoteza została osłabiona do świadków rozkładalnych. W pracy [W7] podaliśmy przykład podaliśmy rodzinę świadków rozkładalnych w $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$ które łamią hipotezę SPA, zatem osłabiona wersja tej hipotezy okazała się również fałszywa. Poprzez zanurzenie, skonstruowana rodzina jest kontrprzykładem dla hipotezy dla dowolnych podukładów o wymiarach większych niż 2. Hipoteza jest udowodniona w wymiarach $2 \times n$, dla $n \leq 4$. Pozostaje sprawdzić (przez udowodnienie hipotezy lub podanie kontrprzykładu) wymiary $2 \times n$, dla $2 \times n, n > 4$.

Podsumowanie graficzne

Powyższy rysunek z pracy [W8] przedstawia ilustrację opisanych zagadnień za pomocą stożków w $\mathbb{R}^3$. Rysunek przedstawia cięcie przestrzeni $\mathbb{R}^3$ płaszczyzną rysunku.

Częściowa transpozycja w $\mathcal{B}_H(\mathbb{C}^3)$ jest liniową inwolucją i jako taka jest odbiciem. Płaszczyznę odbicia (zbiór punktów stałych częściowej transpozycji) obrazuje linia przerywana. Jasnozielony (LG) trójkąt reprezentuje zbiór operatorów półdodatnio określonych (stanów). Punkt (1) to stan czysty. Przekrój tego zbioru z jego odbiciem to zbiór stanów PPT. Na rysunku jest to sześciokąt. Jego podzbiór, żółty (Y) “napompowany” sześciokąt to stany separowalne. Ciemnozielone (DG) obszary sześciokąta stanów PPT to stany splątane PPT. Punkt (2) to ekstremalny stan PPT i jednocześnie tzw. “stan narożnikowy” (egde state - odjęcie od niego dowolnego stanu separowalnego prowadzi do stanu o ujemnej częściowej transpozycji, zgodnie z ogólną definicją wykrywania jest to element optymalnie wykrywający świadków rozkładalnych w zbiorze wszystkich świadków).

Otoczka wypukła sumy zbioru operatorów dodatnich i obrazu tego zbioru po częściowej transpozycji tworzy stożek $\mathcal{W}_D$ (świadkowie rozkładalni i obserwable dodatnie). Na rysunku jest to większy sześciokąt. Jego jasnoczerwona (LR) część reprezentuje zbiór świadków



rozkładalnych. Stożek dualny do stożka stanów separowalnych (żółty (Y) obszar) to stożek $\mathcal{W}_1$. Na rysunku jest to największy z obszarów. Ciemnoczerwony (DR) obszar odpowiada zbiorowi świadków nierozkładalnych.

Na brzegu zbioru świadków możemy wyróżnić świadków ekstremalnych - to domknięte łuki oznaczone kolorem ciemnoniebieskim (DB). Wśród nich tylko punkty z otwartych łuków są eksponowane, punkt (4) jest świadkiem ekstremalnym, ale nie eksponowanym (Jak np. świadek pochodzący z odwzorowania Choi). Jasnoniebieskie (LB) punkty na brzegu odpowiadają świadkom optymalnym, które nie są eksponowane. W środkach tych odcinków leżą świadkowie optymalni rozkładalni. Świadkowie ND-optymalni na rysunku pokrywają się ze świadkami ekstremalnymi (w rzeczywistości są ich nadzbiorem).

Hipotezę SPA spełniają na rysunku tylko świadkowie optymalni rozkładalni. W rzeczywistości zarówno wśród świadków optymalnych rozkładalnych jak i nierozkładalnych znajdziemy przykłady potwierdzające hipotezę SPA jak i będące jej kontrprzykładami (gdy wymiary podukładów są większe niż 2).

6. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo - badawczych

a) Lista publikacji nie wchodzących w skład osiągnięcia

- [W10] Gniewomir Sarbicki *General theory of detection and optimality* arXiv:0905.0778 (2009)
- [W11] G. Sarbicki *Geometry of Local Orbits in Three Qubit Problem* Open Systems & Information Dynamics 12: 143-161 (2005)
- [W12] G. Sarbicki *Spectral Properties of Entanglement Witnesses* J. Phys. A: Math. Theor. 41 (2008) 375303
- [W13] G. Sarbicki *Spectral Properties of Entanglement Witnesses and Separable States* Journal of Physics: Conference Series 104 (2008) 012009
- [W14] D. Chruściński, A. Kossakowski, G. Sarbicki *Spectral conditions for entanglement witnesses vs. bound entanglement* Phys. Rev A 80, 042314 (2009)
- [W15] G. Sarbicki, I. Bengtsson *Dissecting the qutrit* J. Phys. A: Math. Theor. 46 035306 (2013) arXiv:1208.2118
- [W16] F. A. Wudarski, P. Należyty, G. Sarbicki, D. Chruściński *On admissible memory kernels for random unitary qubit evolution* Phys. Rev. A 91, 042105 (2015) arXiv:1501.05179

b) Omówienie najważniejszych kierunków badań i wyników nieuwjętych w osiągnięciu

Orbity grupy operacji lokalnych

Tematem badań była topologia orbit operacji lokalnych dla dwóch i trzech qubitów. Orbity klasyfikują się ze względu na to, jak podgrupa jest stabilizatorem ich elementów. Utożsamiając w grupie $SU(2)^{\times 3}$ elementy różniące się o stabilizator, dostajemy zbiór homeomorficzny z orbitą. Orbity te mają w ogólności topologię wiązek włókniстых i w każdym przypadku identyfikowałem ich włókno i przestrzeń bazową.

Własności spektralne świadków splątania i stanów separowalnych

Używając metod geometrii algebraicznej znalazłem warunek na maksymalną ilość ujemnych wartości własnych świadka splątania i ogólniej dla świadków k -splątania (k -Schmidt witnesses [16], to są obserwable nie półdodatnio określone, ale półdodatnio określone na wektorach o rzędzie Schmidta nie przekraczającym k). Udowodniłem warunki konieczne

jakie muszą spełniać jądro oraz podprzestrzenie V_+ i V_- napinane przez wektory własne przy odpowiednio dodatnich i ujemnych wektorach własnych. Silniejszy warunek wiążący te podprzestrzenie pozwala na zagwarantowanie, że mając dwie dowolne obserwable dodatnio określone W_+ i W_- o nośnikach odpowiednio na V_+ i V_- , istnieje odpowiednio duże λ takie, że $\lambda W_+ - W_-$ jest świadkiem splątania (wszystkie dowody są przeprowadzane dla ogólnego przypadku świadków k -splątania). Wprowadzając współczynnik Schmidta podprzestrzeni, jako maksymalny największy współczynnik Schmidta wektorów unormowanych w tej podprzestrzeni, sformułowałem dla zadanej bazy ortonormalnej której wektory spełniają warunki konieczne, ilościowe warunki konieczne na wartości własne świadka diagonalnego w tej zadanej bazie.

W pracy [W13] definiuję normę $S - sup$, która jest odpowiednikiem normy supremum, ale supremum jest brane po unormowanych wektorach produktowych. Przy użyciu tej normy wprowadzam równoważne sformułowanie problemu separowalności: $\forall \eta \langle \eta | \rho \rangle \leq ||\sqrt{\eta}||_{S-sup}^2$. Trudność w sprawdzaniu tej definicji jest ukryta w obliczaniu normy $S - sup$. Możemy otrzymać prosty warunek konieczny separowalności, gdy ograniczymy się do η czystych. Z niego z kolei tej wynika spektralny warunek konieczny separowalności - żadna wartość własna stanu separowalnego nie może przekroczyć kwadratu maksymalnego współczynnika Schmidta odpowiadającego jej wektora własnego. Co ciekawe, dla stanów których bazą własną jest baza Bella, jest to jednocześnie warunek wystarczający. Podobne ograniczenia dotyczą sum wartości własnych stanu separowalnego - wtedy za prawą stronę trzeba wziąć kwadrat maksymalnego największego współczynnika Schmidta wektorów unormowanych w podprzestrzeni napinanej przez wektory własne odpowiadające rozpatrywanym wartościom własnym. Pokazałem, że takie kryterium jest już w stanie wykrywać splątanie PPT.

W pracy [17] autorzy wyprowadzają warunki wystarczające na wartości własne świadka k -splątania nie odwołujące się do własności odpowiadających im wektorów własnych (jak np. ich maksymalne współczynniki Schmidta). W pracy [W14] pokazujemy, że tak zdefiniowani świadkowie nie są w stanie wykryć splątania PPT.

Geometria zbioru stanów qutritu w języku niskowymiarowych cięć

W pracy [18] rozważano kształty cięć zbioru stanów qutritu płaszczyznami napinanymi przez pary macierzy Gell-Manna. W odpowiedzi w pracy [W15] pokazaliśmy że zbiór wszystkich możliwych cięć jest łatwy do sparametryzowania. Brzeg takiego ogólnego cięcia jest krzywą trzeciego stopnia na płaszczyźnie, a w pewnych szczególnych przypadkach jego fragmenty są krzywymi drugiego i pierwszego stopnia. Pokazaliśmy, gdzie w zbiorze wszystkich cięć leżą te szczególne przypadki (skończony zbiór cięć pokazanych w pracy [18])

zawierał się w tym podzbiorze). W tym podzbiorze w pełni scharakteryzowaliśmy wszystkie kształty cięć. Rysunek pokazujący gdzie w zbiorze wszystkich cięć leżą te szczególne przypadki trafił na okładkę Journal of Physics A.

Dynamika otwartych układów kwantowych z jądrem pamięci

W dynamice układów otwartych, równanie master $\dot{\rho} = L\rho$ uogólnia się uzależniając Lindbladian od czasu. Każda ogólniejsza dynamika nazywana jest (nieprecyzyjnie) dynamiką niemarkowską. W pracy [W16] rozważaliśmy dynamikę układu otwartego, w którym dynamika zredukowana jest zadana przez równanie splotowe z jądrem pamięci

$$\dot{\rho}(t) = \int_0^t K(\tau)\rho(t-\tau)d\tau$$

Równanie takie otrzymuje się z równania Nakajimy-Zwanziga (część półgrupową w równaniu można ukryć w części atomowej K). Podstawowym pytaniem jest jakie jądra prowadzą do poprawnej dynamiki, tzn. zachowującej dodatniość operatora gęstości. W pracy ograniczamy się do jąder komutatywnych, w których $[K(t_1), K(t_2)] = 0$ - w każdym kanale jest to niezależna dynamika. Mimo takiego upraszczającego założenia, jest to ciągle trudne pytanie. W pracy podajemy warunek wystarczający dający metodę konstrukcji szerokiej klasy takich jąder. Otrzymujemy go wykonując transformatę Laplace'a tego równania i sprawdzając kiedy transformata ρ będzie funkcją *complete monotone*. W uogólnianiu klasycznej definicji Markowa na przypadek kwantowy (bezpośrednie uogólnienie nie jest możliwe, ze względu na nieistnienie w teoriach niekomutatywnych prawdopodobieństwa warunkowego) wprowadza się definicje podzielności dynamiki. Dla rodziny propagatorów $L_{s,t}$ dynamika jest CP-podzielna, jeżeli dla każdego t propagator $L_{0,t}$ (który jest zawsze kompletnie dodatni) dla każdej chwili pośredniej s można przedstawić jako iloczyn dwóch kompletnie dodatnich propagatorów $L_{0,s}L_{s,t}$. Podobnie, dynamika jest P-podzielna, jeżeli zawsze istnieje rozkład, ale propagatory pośrednie wystarczy że są tylko dodatnie. Pokazujemy, że dla dynamiki splotowej uzyskanej z naszej konstrukcji możemy mieć CP-podzielność, P-podzielność lub nie mieć żadnej podzielności. Ostatnia możliwość oznacza powrót informacji z otoczenia do układu. W takiej sytuacji otoczenie stanowi zewnętrzny rejestr informacyjny dla układu.

7. Trwające projekty i dalsze plany

Obecnie zajmuję się dynamiką układów otwartych zadaną przez równania splotowe i badam klasy wymiernych funkcji CM, które pozwalają formułować warunki wystarczające na własności jądra pamięci prowadzącego do poprawnej dynamiki układu. Kolejną tematem jest wyjście w

tej analizie poza klasę jąder komutujących w różnych chwilach czasu do klasy najogólniejszej, w pełni kwantowej.

Kolejnym tematem do którego chciałbym wrócić to zagadnienia termodynamiki kwantowej nad którymi pracowałem w Sztokholmie z I. Bengtssonem i G. Lindbladem. Kwantowym odpowiednikiem maszyny cieplnej jest układ otwarty sprzężony do (przynajmniej) dwóch, nieoddziałujących ze sobą rezerwuarów, pobudzany okresowo. Układy takie są obecnie osiągalne doświadczalnie, co pozwala weryfikować przewidywania teoretyczne i dostarczyć nam informacji jak się zachowują prawa termodynamiki gdy przechodzimy do granicy małych układów.

8. Kierownictwo i udział w projektach badawczych

- Współwykonawca grantu 3004/B/H03/2007/33 *Kwantowe splątanie: analiza i klasyfikacja 2007–2010*
- Współwykonawca zadania POKL.04.01.01-00-081/10 *Wzmocnienie potencjału dydaktycznego UMK w Toruniu w dziedzinach matematyczno-przyrodniczych*
- Współwykonawca grantu DEC-2011/03/B/ST2/00136 *Kwantowe korelacje: analiza, detekcja i dynamika*

9. Odczyty i uczestnictwo w konferencjach

Zaproszone wykłady konferencyjne

- Symmetry and structural properties of condensed matter, Myczkowce 2007.IX.5-12
tytuł: *Spectral properties of entanglement witnesses and separable states*
- Symmetry and structural properties of condensed matter, Myczkowce 2009.IX.2-9
tytuł: *Optimality of entanglement witnesses*
- Geometry of Quantum Entanglement, Centre International de Rencontres Mathématiques (CIRM), Marsylia 2012.I.9-13
tytuł *Exposed positive maps and entanglement witnesses - a sufficient condition*

Inne odczyty

- Symposium of LFPPI Net, Łódź 13 - 15 kwietnia 2007
autor odczytu *Spectral properties of entanglement witnesses*
- Symposium of Mathematical Physics, Toruń 11 - 12 czerwca 2007
autor odczytu *Spectral properties of entanglement witnesses*

- IV Łódź Symposium of the Network of Laboratories of Physical Foundations of Information Processing, Łódź, 4 kwietnia 2008
autor odczytu *Spectral properties of separable states*
- Symposium of the Network of Laboratories of Physical Foundations of Information Processing, Sopot 23-25 kwietnia 2009
autor odczytu *Optimality of entanglement witnesses*
- Symposium on Mathematical Physics, Toruń 5-6 czerwca 2009
autor odczytu *Optimality of entanglement witnesses*
- 43 Symposium on Mathematical Physics, Toruń, czerwca 20-22, 2011
autor odczytu *Optimal entanglement witnesses without the property of Hilbert space spanning*

Uczestnictwo w konferencjach

- Konferencja „Quantum entanglement and symetries”, Łódź, 29 - 30 listopada 2003
- Sympozjum „Cryptography and Quantum Information”, Wrocław/Karpacz, 12 - 17 stycznia 2004
- Symposium on Mathematical Physics, Toruń 9 - 12 czerwca 2004
- Sympozjum „Information and Quantum Mechanics”, Wrocław 4 marca 2005
- Symposium on Mathematical Physics, Toruń 17 - 18 czerwca 2005
- Sympozjum „Quantum Information & Engineering”, Wrocław, 27 stycznia 2006
- Symposium on Mathematical Physics, Toruń 4 -7 czerwca 2006
- Symposium of LFPPI Net, Łódź 13 - 15 kwietnia 2007
- Symposium of Mathematical Physics, Toruń 11 - 12 czerwca 2007
- XXVI Workshop on Geometrical Methods in Physics, Białowieża 29 czerwca – 8 lipca of 2007
- 10th Workshop: Non-commutative harmonic analysis with applications to probability, Będlewo 6 -12 sierpnia of 2007
- Symmetry and structural properties of condensed matter, Myczkowce 5th -12th września 2007
- Symposium on Mathematical Physics, Toruń 25-28 czerwca 2008
- Foundations of Probability and Physics-5, Växjö, sierpnia 24-27 2008

- Italian Quantum Information Science Conference, Camerino 24-29 października 2008
- Symposium of the Network of Laboratories of Physical Foundations of Information Processing, Sopot 23-25 kwietnia 2009
- Symposium on Mathematical Physics, Toruń 5-6 czerwca 2009
- Symmetry and structural properties of condensed matter, Myczkowce, 2-9 lipca 2009
- International Conference on Quantum Information Processing and Communication, Rome, 21-25 września, 2009
- 42 Symposium on Mathematical Physics, Toruń, 19-22 czerwca, 2010
- 43 Symposium on Mathematical Physics, Toruń, June 20-22, 2011
- Geometry of Quantum Entanglement, Centre International de Rencontres Mathématiques (CIRM), Marseille, France, 9-13 stycznia 2012
- Quantum Theory: Reconsideration of Foundations - 6, Växjö, 11-14 czerwca 2012
- 44 Symposium on Mathematical Physics, Toruń, 20-24 czerwca, 2012
- KCIK Symposium, Sopot, 23-25 maja 2013
- 45 Symposium on Mathematical Physics, Toruń, 1-2 czerwca, 2013
- QIP 2014, Barcelona, 3-7 lutego 2014
- The V Jubilee KCIK Symposium, Sopot, 22-24 maja 2014
- 46 Symposium on Mathematical Physics, Toruń, 15-17 czerwca, 2014
- 51 Winter School of Theoretical Physics, Ładek, 9-14 lutego, 2015

10. Współpraca krajowa i zagraniczna

- Współpraca z M.Lewensteinem i R.Augusiakiem (ICFO, Barcelona)
- Współpraca z I.Bengtssonem i G.Lindbladem (Stockholms Universitet)
- Współpraca z M.Mozzrymasem (u. Wrocławski)
- Współpraca z A.Rutkowskim (Krajowe Centrum Informatyki Kwantowej, Sopot)
- Współpraca z S.Maniscalco (Turku)
- Współpraca z grupą M.Ohya (Tokyo University of Science)

11. Dane bibliometryczne

Liczba opublikowanych artykułów: 15 + 1 preprinty

Google Scholar:

Cytowania	188	176 (od 2010)
h-indeks	8	8 (od 2010)
i10-indeks	8	8 (od 2010)

Web of Science

Suma cytowań	105
Suma cytować bez autocytowań	82
h-index	6

Bibliografia

- [1] R. F. Werner *Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model* Phys. Rev. A **40**, 4277 (1989)
- [2] L. Gurvits *Classical deterministic complexity of edmonds problem and quantum entanglement* Proc. of the 35th ACM symp. on Theory of comp., 10-19, (2003)
- [3] S. Gharibian *Strong NP-Hardness of the Quantum Separability Problem* Quantum Information and Computation, Vol. 10, No. 3&4, pp. 343-360 (2010)
- [4] B. M. Terhal *Bell inequalities and separability criterion* Phys. Lett. A **271**, 319 (2000)
- [5] A. Peres *Separability criterion for density matrices* Phys. Rev. Lett. **77**(8), 1413 (1996)
- [6] K. Chen, L.A. Wu *A matrix realignment method for recognizing entanglement*, Quantum Inf. Comput. **3** 193 (2003)
- [7] A. C. Doherty, P. A. Parrilo, F. M. Spedalieri *Distinguishing separable and entangled states* Phys. Rev. Lett. **88**, 187904 (2002).
- [8] A. C. Doherty, P. A. Parrilo, F. M. Spedalieri *A complete family of separability criteria* Phys. Rev. A **69**, 022308 (2004)
- [9] M. Lewenstein, B. Kraus, J. I. Cirac, P. Horodecki *Optimization of entanglement witnesses* Phys. Rev. A **62**, 052310 (2000)
- [10] K.-Ch. Ha, S.-H. Kye *Optimality for indecomposable entanglement witnesses* Phys. Rev. A **86**, 034301 (2012)
- [11] S. Straszewicz *Über exponierte Punkte abgeschlossener Punktemengen* Fund. Math. **24**, 139-143 (1935)
- [12] M. Marciniak *Rank properties of exposed positive maps* Linear and Multilinear Algebra, **61**, Number 7, 970-975 (2013)
- [13] P. Horodecki, A. Ekert *Method for Direct Detection of Quantum Entanglement* PRL **89**, 127902 (2002) arXiv:quant-ph/0111064

- [14] J.K. Korbicz, M.L. Almeida, J. Bae, M. Lewenstein, A. Acin, Phys. Rev. A **78**, 062105 (2008).
- [15] K.-Ch. Ha, S.-H. Kye *The structural physical approximations and optimal entanglement witnesses* J. Math. Phys. 53, 102204 (2012)
- [16] A. Sanpera, D. Bruss, M. Lewenstein *Schmidt number witnesses and bound entanglement* Phys. Rev. A 63 050301 (2001) arXiv:quant-ph/0009109
- [17] D. Chruściński, A Kossakowski *Spectral conditions for positive maps* Comm. Math. Phys. 290, 1051 (2009)
- [18] S. K. Goyal, B. N. Simon, R. Singh, S. Simon *Geometry of the generalized Bloch sphere for qutrit* arXiv:1111.4427

