

## Załącznik 2

Jacek Jurkowski  
Instytut Fizyki, Wydział Fizyki, Astronomii  
i Informatyki Stosowanej  
ul. Grudziądzka 5, 87–100 Toruń

## Autoreferat

### 1. Imię i Nazwisko

Jacek Jurkowski

### 2. Posiadane dyplomy i stopnie naukowe — z podaniem nazwy, miejsca i roku ich uzyskania

- Studia magisterskie: 1988 – 1993, fizyka teoretyczna, Uniwersytet Mikołaja Kopernika
- stopień magistra: czerwiec 1993, nauki fizyczne, Uniwersytet Mikołaja Kopernika na podstawie pracy *Statystyczne własności widma hamiltonianu Heisenberga* (promotor: prof. dr hab. J. Karwowski)
- stopień doktora: listopad 2000, nauki fizyczne, Uniwersytet Mikołaja Kopernika na podstawie rozprawy: *Przekształcenia kontaktowe i ich zastosowanie w termodynamice procesów równowagowych* (promotor: dr hab. R. Mrugała)

### 3. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych

- 1.09.1993 – 2001: asystent w Instytucie Fizyki UMK
- 2001–01.2012: adiunkt na Wydziale Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej UMK
- od stycznia 2012: starszy wykładowca na Wydziale Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej UMK

### 4. Nagrody i wyróżnienia

- (1) Nagroda Zespołowa II stopnia Rektora Uniwersytetu M. Kopernika za przygotowanie i zorganizowanie *38 Sympozjum Fizyki Matematycznej: Kwantowe Splątanie i Geometria*
- (2) Indywidualna Nagroda Rektora Uniwersytetu M. Kopernika IV stopnia za osiągnięcia uzyskane w dziedzinie organizacji procesu nauczania w 2007 przyznana 17.11.2008
- (3) Zespołowa Nagroda Rektora UMK III stopnia za osiągnięcia naukowo-badawcze w 2008 roku przyznana 17.11.2009 roku
- (4) Zespołowa Nagroda Rektora UMK II stopnia za osiągnięcia w dziedzinie naukowo-badawczej w 2010 roku

**5. Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.)**

Monografia pod tytułem

*Korelacje nieklasyczne. Kwantowe splątanie i dyskord*

autor: Jacek Jurkowski

wydana przez Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń, 2014.  
ISBN 978-83-231-3198-4

Moja praca badawcza oraz naukowe zainteresowania po uzyskaniu tytułu doktora skupiły się wokół trzech zagadnień:

- (1) badanie korelacji kwantowych, w szczególności kwantowego splątania stanów i dyskordu,
- (2) wykorzystanie metod algebr Liego przy rozwiązywaniu równań różniczkowych,
- (3) kwantowanie układów z dyssypacją,

Podsumowaniem moich badań dotyczących problematyki korelacji kwantowych jest monografia *Korelacje nieklasyczne. Kwantowe splątanie i dyskord* [1], którą przedstawiam jako moją rozprawę habilitacyjną. Monografia składa się z czterech rozdziałów, które zawierają najważniejsze wyniki moich badań naukowych przedstawione w szerszym kontekście współczesnych problemów klasyfikacji, jakościowej i ilościowej oceny korelacji klasycznych i kwantowych oraz ich roli w informatyce kwantowej.

Wśród przejawów korelacji kwantowych na pierwszy plan wysuwa się splątanie [2], jako pewna szczególna własność stanów kwantowych układów złożonych. Dla stanów czystych układu dwóch cząstek  $|\Psi\rangle$  oznacza ono brak faktoryzacji wektora stanu układu złożonego na wektory podukładów i w konsekwencji oznacza konieczność charakteryzacji stanu jako kombinacji liniowej stanów produktowych, tj.

$$|\Psi\rangle = \sum_{jk} c_{jk} |\phi_j\rangle \otimes |\psi_k\rangle$$

w której współczynniki  $c_{jk}$  nie faktoryzują się. Dla stanów mieszanych sytuacja staje się subtelniejsza i o tym czy są one splątane, czy nie (brak splątania = separowalność) decyduje w dużej mierze sposób ich powstania. Stan mieszany  $\rho_{AB}$  jest *separowalny*, jeśli powstał z dwóch rodzin stanów  $\{\rho_k^A\}$ ,  $\{\rho_k^B\}$  przygotowanych w odległych laboratoriach A oraz B jako wynik *tylko* lokalnych operacji i klasycznej komunikacji (np. przekazanie rozkładu prawdopodobieństwa  $\{p_k\}$ ) pomiędzy A i B, tj.

$$\rho_{AB} = \sum_k p_k \rho_k^A \otimes \rho_k^B. \quad (1)$$

i pozostał niezaburzony przez wpływ otoczenia.

W [1, Rozdz. 3] formułuję najważniejsze problemy związane z badaniem splątania:

- (1) Jak wykrywać splątanie, tzn. jak odróżnić, który stan układu złożonego jest splątany, a który separowalny? Znana jest odpowiedź na to pytanie w przypadku stanów czystych, ale dla stanów mieszanych proste rozwiązanie tego problemu możliwe jest tylko dla nisko wymiarowych układów złożonych opisywanych w przestrzeniach Hilberta  $\mathcal{H}_{AB} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  lub  $\mathcal{H}_{AB} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$ . Dla stanów o spinie większym niż 1/2 musimy opierać się na algorytmach numerycznych. Trzeba także rozwijać metody, które wykryją splątanie stanu doświadczalnie, przy użyciu dostępnych metod pomiarowych.

- (2) Jak mierzyć splątanie? Metoda wykorzystująca entropię von Neumanna stanu daje prostą odpowiedź dla stanów czystych, ale uogólnienia tej miary splątania na stany mieszane są w praktyce trudne do obliczenia. Dlatego rozwijane są metody szacowania miar splątania.
- (3) Jak chronić splątanie? Okazało się, że splątanie jest bardzo nietrwałe, gdy stan układu podlega nawet słabemu oddziaływaniu z otoczeniem. Podczas gdy koherencja zanika eksponencjalnie w czasie, splątanie potrafi zaniknąć zupełnie w skończonym czasie. Dlatego opracowuje się metody aktywacji i destylacji splątania.

Splątanie jest tylko jednym z przejawów występowania nieklasycznych korelacji pomiędzy stanami lub ogólniej układami. Te nieklasyczne korelacje stanowią pewien zasób układu, który może być wykorzystany w szeregu teorio-informacyjnych zastosowań (tak jak energia kinetyczna układu może być wykorzystana do wykonania użytecznej pracy) takich jak teleportacja, kodowanie, szyfrowanie i inne protokoły kwantowe.

Różnorodność przejawów korelacji w stanach mieszanych układów złożonych w zasadzie nikogo nie dziwi, ale do niedawna panowało przekonanie, że w stanach separowalnych (1) mogą występować tylko korelacje klasyczne. Tymczasem stany  $\{\rho_k^A\}$  i/lub  $\{\rho_k^B\}$  nie muszą być rodzinami komutujących macierzy gęstości, a w konsekwencji, mogą wносить pewien rodzaj korelacji do  $\rho_{AB}$  wynikający z ich niewspółmierzalności. W tym kontekście tylko stany

$$\rho_{cc} = \sum_{i,k} p_{ik} |e_i\rangle\langle e_i| \otimes |f_k\rangle\langle f_k|, \quad (2)$$

gdzie  $\{|e_i\rangle\}$  oraz  $|f_k\rangle$  są ortonormalnymi bazami w obu podukładach, rzeczywiście nie zawierają korelacji nieklasycznych. Stany takie nazywa się *klasycznymi*, bowiem są one całkowicie scharakteryzowane przez klasyczny łączny rozkład prawdopodobieństwa  $\{p_{ik}\}$ .

W odróżnieniu od stanów klasycznych, stany *kwantowo-klasyczne* i *klasyczno-quantowe* postaci

$$\rho_{qc} = \sum_k p_k \rho_k^A \otimes |f_k\rangle\langle f_k|, \quad \rho_{cq} = \sum_i q_i |e_i\rangle\langle e_i| \otimes \rho_i^B. \quad (3)$$

mogą, przy niekomutujących zbiorach macierzy  $\{\rho_k^A\}$  lub  $\{\rho_k^B\}$ , wykazywać nieklasyczne korelacje.

Wszystkie wymienione powyżej rodziny stanów są separowalne, zatem żadna miara splątania nie jest w stanie sklasyfikować ich kwantowych korelacji. Potwierdza to wcześniejszą obserwację, że splątanie stanowi tylko pewien aspekt nieklasycznych korelacji stanów kwantowych. Miary korelacji, które wprowadza się do ich rozróżnienia, są różnymi odmianami *kwantowego dyskordu* i jego geometrycznego odpowiednika. Wielkościom tym poświęcono przeglądowy artykuł [3], a także [1, Rozdz. 2.5 oraz Rozdz. 4].

Wielkości te, oprócz roli klasyfikującej korelacje stanów, mają również fizyczną interpretację w ramach termodynamiki układów mikroskopowych, deficytu kwantowej informacji i nieodwracalności splątania, protokołów kwantowych oraz zupełnie dodatkowo dynamiki układów otwartych (por. przeglądowy artykuł [4]).

Tymczasem teorio-informacyjny punkt widzenia zaowocował dwoma niezależnymi definicjami kwantowego dyskordu opartymi o następujące obserwacje:

- (1) dwie wielkości entropowe określone na gruncie klasycznym jako:

$$I_{AB} = S(A) + S(B) - S(A, B), \quad J_{AB} = S(A) - S(A|B), \quad (4)$$

gdzie  $S(X)$  jest entropią Shannona podukładu  $X$ , a  $S(A|B)$  jest entropią warunkową, są tożsamościowo równe. Tymczasem nie muszą mieć tej własności po ich uogólnieniu na grunt kwantowy! Uogólnienie to polega na zastąpieniu entropii Shannona  $S$  entropią von Neumanna  $H$  w wyrażeniu na  $I_{AB}$  oraz na interpretacji entropii warunkowej jako

wielkości Holewo związanej z optymalnym kwantowym pomiarem w wyrażeniu na  $J_{AB}$ , które w związku z tym zostaje zastąpione przez<sup>1</sup>

$$J_{AB} \longrightarrow C_{AB} = \sup_{\Pi^B} \left( H(A) - H(A|\{\Pi^B\}) \right).$$

Biorąc pod uwagę, że  $I_{AB}$  jest interpretowane jako miara wszystkich korelacji w danym stanie układu (klasycznego lub kwantowego), niezerowa różnica  $I_{AB} - C_{AB}$  wskazuje na istnienie korelacji kwantowych,

- (2) bardzo użyteczna byłaby klasyfikacja wszystkich korelacji zawartych w entropii wzajemnej  $I_{AB}$  na te klasyczne i kwantowe. Wielkość

$$D_{AB} := I_{AB} - C_{AB}, \quad (5)$$

nazwana *kwantowym dyskordem*, byłaby dobrym kandydatem na miarę korelacji kwantowych.

Splątanie, kwantowy dyskord i inne przejawy korelacji nieklasycznych są nadal intensywnie badane teoretycznie, jak i doświadczalnie. Monografia [1] zawiera omówienie wielu aspektów tych badań, jednak jej oś stanowią oryginalne rezultaty autora opublikowane w pracach naukowych. We Wstępie do [1] przedstawiłem motywacje, które mną kierowały przy powstawaniu tego opracowania oraz omówiłem zakres tematyczny, który został w nim przedstawiony. W tym miejscu zwrócę tylko uwagę na to, że moje badania w tej dziedzinie dotyczyły szczególnie kilku następujących zagadnień:

- (1) Wykrywanie splątania stanów cyklicznych: przedstawione w [1, Rozdz. 3.3.4], w oparciu o [7].
- (2) Wyznaczanie lokalnego zakresu numerycznego dla operatorów cyklicznych: omówione w [1, Rozdz. 1.6], a także [8, 9].
- (3) Badanie własności stanów SPPT: przedstawione w [1, Rozdz. 3.3.3] w oparciu o [5, 6].
- (4) Szacowanie zgodności z wykorzystaniem świadków splątania: dyskutowane w [1, Rozdz. 3.5], a także w [11, 12].
- (5) Badanie własności kwantowego  $q$ -dyskordu opartego na entropii Tsallisa: omówione w [1, Rozdz. 4.4] w oparciu o [13, 14, 15].

<sup>1</sup> Można bowiem rozważać sytuację, w której informacja o stanie układu złożonego czerpana jest z pomiaru pewnych obserwacji na jednym z podukładów (np. B). Niech kwantowy pomiar na podukładzie B będzie określony przez rodzinę 1-wymiarowych ortogonalnych projektorów  $\{\Pi_k^B\}$ . W jego wyniku otrzymujemy zredukowany stan podukładu A w postaci rodziny (ansamblu)  $\{p_k, \rho_k^A\}$ , gdzie

$$\rho_k^A = \frac{1}{p_k} \text{tr}_B[(\mathbb{1} \otimes \Pi_k^B) \rho_{AB} (\mathbb{1} \otimes \Pi_k^B)^\dagger],$$

oraz  $p_k = \text{tr}[(\mathbb{1} \otimes \Pi_k^B) \rho_{AB}]$  jest prawdopodobieństwem zmierzenia stanu  $\rho_k^A$ . Można teraz wykorzystać *wielkość Holewo*

$$\chi(\{p_k, \rho_k^A\}) := \sum_k p_k H(\rho_k^A)$$

określoną przez ansambl  $\{p_k, \rho_k^A\}$ , do wyznaczenia kwantowego odpowiednika entropii warunkowej  $H(A|\{\Pi^B\})$ , tym razem *warunkowanej pomiarem*. Korelacje (klasyczne) uzyskane tą drogą są, po optymalizacji po wszystkich pomiarach, postaci:

$$C_{AB} = \sup_{\Pi^B} C_{AB}^{\Pi^B} = \sup_{\Pi^B} \left( H(A) - H(A|\{\Pi^B\}) \right) = H(A) - \sup_{\Pi^B} \sum_k p_k H(\rho_k^A).$$

Wielkość  $C_{AB}$  powinna zatem zastąpić  $J_{AB}$  w wyrażeniu (4).

Zagadnienia te zostaną szerzej omówione w dalszej części autoreferatu. Oprócz tej tematyki monografia zawiera omówienie

- w rozdziale 1 — elementów formalizmu matematycznego używanego w monografii ze szczególnym uwzględnieniem roli entropii i odwzorowań dodatnich,
- w rozdziale 2 — klasyfikacji korelacji nieklasycznych i ich miar,
- w rozdziale 3 — kwantowego splątania stanów, sposobów jego wykrywania i ilościowej oceny, przy użyciu miar lub ich oszacowań,
- w rozdziale 4 — kwantowego dyskordu i metod jego wyznaczania.

Według mojej wiedzy nie ma w literaturze podobnego opracowania, które starałoby się połączyć różne aspekty korelacji nieklasycznych i charakteryzować je w jednolitych ramach.

### 5.1. Wykrywanie splątania stanów cyklicznych

Stany cykliczne związane są ze szczególnym rozkładem przestrzeni Hilberta układu złożonego  $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$  na sumę prostą podprzestrzeni  $\Sigma_k$  postaci

$$\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d = \bigoplus_{k=1}^d \Sigma_k \quad (6)$$

gdzie  $\Sigma_k = (\mathbb{1} \otimes S^k)\Sigma_1$ ,  $S|e_i\rangle = |e_{i+1}\rangle \bmod d$ ,  $\{|e_1\rangle, \dots, |e_d\rangle\}$  jest ustaloną bazą w  $\mathbb{C}^d$  oraz  $\Sigma_1 = \text{span}\{|e_1\rangle \otimes |e_1\rangle, |e_2\rangle \otimes |e_2\rangle, |e_3\rangle \otimes |e_3\rangle\}$  (por. [1, s. 118]).

W badanym przeze mnie przypadku stanów  $3 \otimes 3$  rozkład (6) ma postać

$$\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3 = \Sigma_1 \oplus \Sigma_2 \oplus \Sigma_3$$

gdzie

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \text{span}\{|e_1\rangle \otimes |e_1\rangle, |e_2\rangle \otimes |e_2\rangle, |e_3\rangle \otimes |e_3\rangle\}, \\ \Sigma_2 &= \text{span}\{|e_1\rangle \otimes |e_2\rangle, |e_2\rangle \otimes |e_3\rangle, |e_3\rangle \otimes |e_1\rangle\} = (\mathbb{1} \otimes S)\Sigma_1, \\ \Sigma_3 &= \text{span}\{|e_1\rangle \otimes |e_3\rangle, |e_2\rangle \otimes |e_1\rangle, |e_3\rangle \otimes |e_2\rangle\} = (\mathbb{1} \otimes S^2)\Sigma_1, \end{aligned}$$

są trzema ortogonalnymi podprzestrzeniami  $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$ . Wówczas *cykliczny stan*  $3 \otimes 3$  konstruuje się jako sumę trzech dodatnio półokreślonych operatorów

$$\varrho_k = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}^{(k)} |i\rangle\langle k| \otimes |i+k\rangle\langle j+k|, \quad k = 1, 2, 3,$$

zdefiniowanych odpowiednio na podprzestrzeniach  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ , gdzie macierze  $A^{(k)} = [a_{ij}^{(k)}]$ ,  $k = 1, 2, 3$ , są dodatnio półokreślone. Stan cykliczny  $3 \otimes 3$  ma zatem postać

$$\varrho = \frac{1}{N}(\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3),$$

gdzie  $N = \text{tr}(A^{(1)} + A^{(2)} + A^{(3)})$ , i jest charakteryzowany przy trzy dodatnio półokreślone macierze  $A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}$ .

Nasuują się pytania dotyczące separowalności i splątania stanów cyklicznych. Problemu tego nie udało się do tej pory rozwiązać w ogólności, ale pewne obserwacje poczyniłem w pracy [7], a także w [1, Rozdz. 3.3.4]. Badane przeze mnie stany to podklasa stanów cyklicznych  $3 \otimes 3$  odpowiadających wyborowi następujących macierzy  $A^{(k)}$ :

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{bmatrix} d_{12} & \cdot & \cdot \\ \cdot & d_{23} & \cdot \\ \cdot & \cdot & d_{31} \end{bmatrix}, \quad A^{(3)} = \begin{bmatrix} d_{13} & \cdot & \cdot \\ \cdot & d_{21} & \cdot \\ \cdot & \cdot & d_{32} \end{bmatrix}.$$

Rozważmy rodzinę stanów  $\varrho(A, \varepsilon)$ , dla których  $A \equiv A^{(1)} \geq 0$ ,  $0 < \varepsilon \neq 1$  oraz

$$d_{i,i+1} = \varepsilon |a_{i,i+2}|, \quad d_{i,i+2} = \frac{1}{\varepsilon} |a_{i,i+2}|, \quad i = 1, 2, 3.$$

Badania numeryczne, jakie prowadziłem w oparciu o uogólnione kryterium reorganizacji (por. [1, s. 82])<sup>2</sup>, wskazują na związek dominacji diagonali macierzy  $A$  z problemem separowalności tych stanów.<sup>3</sup> Niestety, nie udało się dowieść (ale i obalić) następującej hipotezy:

**HIPOTEZA 1:**

- (1) Jeśli macierz  $A$  ma ściśle dominującą diagonalę i  $0 < \varepsilon \neq 1$ , to stany  $\varrho(A, \varepsilon)$  są separowalne.
- (2) Jeśli dodatkowo półokreślona macierz  $A$  ma maksymalnie złamaną dominację diagonalą i  $0 < \varepsilon \neq 1$ , to stany  $\varrho(A, \varepsilon)$  są splątane.

Ciekawą podklasę rodziny  $\varrho(A, \varepsilon)$  stanowią stany z  $A = \mathbf{1}$ , gdzie

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

które charakteryzuje cykliczna struktura głównej diagonalą z elementami

$$\{(1, \varepsilon, \varepsilon^{-1}), (\varepsilon^{-1}, 1, \varepsilon), (\varepsilon, \varepsilon^{-1}, 1)\}. \quad (7)$$

Jak pokazano w pracy [7] oraz [1, s. 120] stany  $\varrho(\mathbf{1}, \varepsilon)$  są splątane w całym zakresie  $0 < \varepsilon \neq 1$ , co pozostaje w pełnej zgodności z hipotezą 1, ponieważ  $\mathbf{1}$  ma maksymalnie złamaną dominację diagonalą.

## 5.2. Wyznaczanie lokalnego zakresu numerycznego operatorów

Elegancka metoda wykrywania splątania stanu dwucząstkowego  $\rho$  działającego na przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  polega na znalezieniu dla niego *świadka splątania*, tzn. samosprężonego operatora  $W$ , nieujemnego na stanach produktowych, tj.

$$\langle \psi | \otimes \langle \phi | W | \phi \rangle \otimes | \psi \rangle \geq 0, \quad | \phi \rangle \in \mathcal{H}_A, \quad | \psi \rangle \in \mathcal{H}_B, \quad (8)$$

który wykrywałby  $\rho$ , tzn.  $\text{tr}(\rho W) < 0$ . Istnieją różne metody konstrukcji świadków (por. [1, Rozdz. 3.2.8]). Jedną z nich oparta jest na prostej obserwacji, że dla każdego świadka splątania  $W$  istnieje liczba  $\lambda > 0$  oraz dodatnio określony operator  $P$ , taki że

$$W = \lambda \mathbb{1} - P.$$

<sup>2</sup> Uogólnione kryterium reorganizacji (*ang.* generalised realignment criterion) można sformułować w następujący sposób: Jeśli stan układu kwantowego  $\rho_{AB}$  jest separowalny, to dla każdego  $u \in [-1, 1]$  wielkość

$$z_u[\rho_{AB}] := |\mathcal{R}(\rho_{AB} + u\rho_A \otimes \rho_B)|_1 - \sqrt{(1 + u \text{tr} \rho_A^2)(1 + u \text{tr} \rho_B^2)} \leq 0,$$

gdzie  $\mathcal{R}$  jest przekształceniem reorganizacji (elementów macierzowych stanu układu złożonego), a  $|\cdot|_1$  jest normą śladową macierzy. W konsekwencji, jeśli warunek powyższy nie jest spełniony, to stan  $\rho_{AB}$  jest splątany.

<sup>3</sup> Macierz  $X = [x_{ij}]$  wymiaru  $d \times d$  nazywa się:

- macierzą z dominującą diagonalą, jeśli  $\forall i = 1, \dots, d \quad a_{ii} \geq \sum_{j, j \neq i} |a_{ij}|$ ,
- macierzą ze ściśle dominującą diagonalą, jeśli  $\forall i = 1, \dots, d \quad a_{ii} > \sum_{j, j \neq i} |a_{ij}|$ ,
- macierzą z maksymalnie złamaną dominacją diagonalą, jeśli  $\forall i = 1, \dots, d \quad a_{ii} < \sum_{j, j \neq i} |a_{ij}|$ .

Liczba  $\lambda$  związana jest z tzw. *lokalnym zakresem numerycznym operatora*  $P$  ( $\text{LNR}(P)$ ). Przez pojęcie to rozumiemy (por. [1, Rozdz. 1.6]) przedział  $\text{LNR}(P) = [a_{\min}, a_{\max}]$  (zawarty w jego widmie), do którego należą wartości  $P$  na stanach produktowych, tzn.

$$\text{LNR}(P) = \{ \langle y | \otimes \langle x | P | x \rangle \otimes | y \rangle : |x| = |y| = 1, |x\rangle \in \mathcal{H}_A, |y\rangle \in \mathcal{H}_B \}. \quad (9)$$

Wówczas warunek (8)

$$0 \leq \langle \psi | \otimes \langle \phi | W | \phi \rangle \otimes | \psi \rangle = \lambda - \langle \psi | \otimes \langle \phi | P | \phi \rangle \otimes | \psi \rangle$$

pociąga za sobą

$$\lambda \geq \sup_{\substack{|\psi|=1 \\ |\phi|=1}} \{ \langle \psi | \otimes \langle \phi | P | \phi \rangle \otimes | \psi \rangle \} = a_{\max}.$$

Zatem umiejętność wyznaczania lokalnych zakresów numerycznych  $\text{LNR}(P)$  operatorów dodatnich pozwalałaby na konstrukcję świadków splątania. Wybór operatora  $P$  wskazywałby na stany wykrywane przez świadka. W ogólności, lokalny zakres numeryczny operatora można wyznaczać numerycznie używając np. metody samouzgodnienia (por. [1, Rozdz. 1.6.1]).

Jednakże motywowany chęcią analitycznego rozwiązania tego problemu przynajmniej dla pewnej klasy operatorów, badałem  $\text{LNR}$  dla *operatorów cyklicznych* działających na  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^d$  [1, Rozdz. 1.6.2]. Podobnie jak omawiane już stany cykliczne, operatory cykliczne związane są z rozkładem przestrzeni Hilberta

$$\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^d = \bigoplus_{k=1}^d \Sigma_k \quad (10)$$

na parami ortogonalne, dwuwymiarowe podprzestrzenie

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \text{span} \{ |e_1\rangle \otimes |f_1\rangle, |e_2\rangle \otimes |f_2\rangle \}, \\ \Sigma_2 &= \text{span} \{ |e_1\rangle \otimes |f_2\rangle, |e_2\rangle \otimes |f_3\rangle \} \\ &\vdots \\ \Sigma_d &= \text{span} \{ |e_1\rangle \otimes |f_d\rangle, |e_2\rangle \otimes |f_1\rangle \}, \end{aligned}$$

gdzie  $\{|e_i\rangle \otimes |f_k\rangle\}$ ,  $i = 1, 2, k = 1, \dots, d$  jest bazą w  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^d$ . Samosprężony operator  $\mathcal{O}$  nazywa się *operatorem cyklicznym* względem cyklicznego rozkładu (10), jeśli

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_d, \quad (11)$$

gdzie każdy operator  $\mathcal{O}_k$  działa na podprzestrzeni  $\Sigma_k$  i może być reprezentowany w bazie  $\{|e_i\rangle \otimes |f_k\rangle\}$  przez zespoloną macierz  $[a_{ij}^{(k)}]$  wymiaru  $2 \times 2$  jako

$$\mathcal{O}_k = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}^{(k)} |e_i\rangle \langle e_j| \otimes |f_{i+k}\rangle \langle f_{j+k}|, \quad (12)$$

gdzie dodawanie indeksów jest mod  $d$ .

Najważniejsze wyniki tych badań można podsumować następująco:

- (1) w przypadku operatora cyklicznego działającego na  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^d$  można zawsze dokonać takiego wyboru ortonormalnej bazy produktowej, aby elementy macierzowe tego operatora w tej bazie były rzeczywiste oraz ekstrema funkcji

$$f_{\mathcal{O}}(|x\rangle, |y\rangle) = \langle x | \otimes \langle y | \mathcal{O} | x \rangle \otimes | y \rangle$$

określające  $\text{LNR}(\mathcal{O})$  były osiągane na wektorach o rzeczywistych współrzędnych [1, Tw. 1.2]. Pozwala to efektywnie ograniczyć problem optymalizacji z przestrzeni  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^d$  do  $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^d$ . Aczkolwiek, problem ten, ponieważ sprowadza się do szukania rozwiązań układu  $d + 2$  równań wielomianowych, nie ma w ogólności analitycznego rozwiązania przy  $d > 2$ ,

- (2) w przypadku  $d = 2$  podano analityczną postać rozwiązania opisującego  $\text{LNR}(\mathcal{O})$  [1, Rozdz. 1.6.3] oraz [8].

### 5.3. Badanie własności stanów SPPT

Szczególną klasę tworzą stany, które po operacji *częściowej transpozycji*, tzn. transpozycji tylko w jednym z podukładów, nadal mają nieujemne widmo. Stany takie określa się jako PPT (*ang.* positive partial transposed states). W układach  $d_A \otimes d_B$  wszystkie stany PPT są separowalne, o ile  $d_A d_B \leq 6$ . W wyższych wymiarach wśród stanów PPT są także stany splątane, ale bardzo słabo, a wykrycie (i zmierzenie) tego splątania jest szczególnie trudne z uwagi na nieskuteczność podstawowego kryterium splątania opartego właśnie o badanie częściowej transpozycji (por. [1, Rozdz. 3.1.4], a także [1, Rozdz. 3.3.2]). Dlatego, z teoretycznego punktu widzenia, niezwykle istotne jest podanie prostej metody generowania stanów PPT i badanie ich splątania, a także wskazanie rodzin stanów PPT, które pozostawałyby separowalne dla dowolnego wymiaru przestrzeni Hilberta. Takie badania i konstrukcje przeprowadziliśmy w [5, 6] wprowadzając stany SPPT (*ang.* Strong PPT) oraz SSPPT (*ang.* Super Strong PPT).

Konstrukcja stanów SPPT układu  $d_A \otimes d_B$  przebiega następująco:

- (1) Ustalmy bazę  $\{|e_1\rangle, \dots, |e_{d_A}\rangle\}$  w przestrzeni  $\mathbb{C}^{d_A}$ .
- (2) Wybierzmy macierze  $X_i$  oraz  $S_{ij}$ ,  $i < j$ ,  $i, j = 1, \dots, d_A$ , wymiaru  $d_B \times d_B$  i skonstruujmy blokową macierz

$$\mathbf{X} = \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c} X_1 & S_{12}X_1 & S_{13}X_1 & \cdots & S_{1d_A}X_1 \\ \hline 0 & X_2 & S_{23}X_2 & \cdots & S_{2d_A}X_2 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & X_{d_A-1} & S_{d_A-1,d_A}X_{d_A-1} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & X_{d_A} \end{array} \right].$$

- (3) Unormowaną macierz  $\frac{1}{N} \mathbf{X}^\dagger \mathbf{X} = \rho_{AB}$ , gdzie  $N = \text{tr}(X_1) + \dots + \text{tr}(X_{d_A})$  nazywamy *stanem SPPT*, jeśli istnieje blokowa macierz

$$\mathbf{Y} = \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c} X_1 & S_{12}^\dagger X_1 & S_{13}^\dagger X_1 & \cdots & S_{1d_A}^\dagger X_1 \\ \hline 0 & X_2 & S_{23}^\dagger X_2 & \cdots & S_{2d_A}^\dagger X_2 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & X_{d_A-1} & S_{d_A-1,d_A}^\dagger X_{d_A-1} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & X_{d_A} \end{array} \right],$$

taka że  $\rho_{AB}^{T_A} = \frac{1}{N} \mathbf{Y}^\dagger \mathbf{Y}$ .

- (4) W takim przypadku mówimy, że stan  $\rho_{AB}$  układu  $d_A \otimes d_B$  ma *reprezentację SPPT* (z punktu widzenia układu B) z macierzami  $X_i$  oraz  $S_{ij}$ .

Podobną konstrukcję można przeprowadzić dla stanu SPPT z punktu widzenia układu A. Oczywiście sama metoda konstrukcji gwarantuje, że otrzymane stany są PPT.



Warunek  $\rho_{AB}^{T_A} = \frac{1}{N} \mathbf{Y}^\dagger \mathbf{Y}$  pociąga za sobą następujące warunki zgodności, które muszą zachodzić pomiędzy  $X_i$  oraz  $S_{ij}$ :

$$\sum_{k=1}^{j-1} X_k^\dagger S_{kj}^\dagger S_{kj} X_k = \sum_{k=1}^{j-1} X_k^\dagger S_{kj} S_{kj}^\dagger X_k \quad \text{dla } j = 2, \dots, d_A, \quad (13)$$

$$\sum_{k=1}^{i-1} X_k^\dagger S_{kj}^\dagger S_{ki} X_k = \sum_{k=1}^{i-1} X_k^\dagger S_{ki} S_{kj}^\dagger X_k \quad \text{dla } 2 \leq i < j = 3, \dots, d_A, \quad (14)$$

W szczególności (13) i (14) są spełnione, jeśli dla każdego  $k < i \leq j$

$$S_{ki} S_{kj}^\dagger = S_{kj}^\dagger S_{ki}. \quad (15)$$

Stany posiadające reprezentację SPPT z rodziną macierzy  $\{S_{ik}\}$  spełniającą warunki (15) nazywa się *stanami SSPPT* (*ang.* Super Strong PPT) układu  $d_A \otimes d_B$ .

Szereg własności tych stanów dotyczących problemów splątania i separowalności, możliwości reprezentowania dowolnego stanu układu złożonego jako stanu SPPT, związku stanów SSPPT ze stanami o zerowym dyskordzie, zostało przebadanych w pracach [5, 6] i szczegółowo przedstawionych w [1, Rozdz. 3.3.3]. Zagadnienie separowalności stanów SPPT można podsumować następująco:

- (1) Stany SSPPT w układzie  $d_A \otimes d_B$  są separowalne [1, Tw. 3.22]. Zatem możliwość reprezentacji stanu SPPT przy użyciu rodziny normalnych macierzy  $\{S_{ik}\}$  spełniających warunki (13) i (14) wystarcza, by zapisać ten stan jako kombinację wypukłą stanów produktowych podukładów. Co więcej, rozkład ten w pewnych sytuacjach jest jedyny [1, Tw. 3.23].
- (2) Jeśli  $d \leq 4$ , to stany SPPT w układzie  $2 \otimes d$  są separowalne [1, Tw. 3.24]. Dla  $d \geq 5$  można podać przykłady stanów splątanych!

Odrębnym problemem jest odpowiedź na pytanie, czy dany stan  $\rho_{AB}$  układu złożonego  $d_A \otimes d_B$  może być reprezentowany jako stan SPPT, tzn. czy ma odpowiednie reprezentacje wykorzystujące  $\mathbf{X}$  i  $\mathbf{Y}$ ? W przypadku układów  $2 \otimes d$ , badanych w [1, Rozdz. 3.3.3], należy wskazać dla danego stanu macierze  $X_1$ ,  $X_2$  oraz  $S$  spełniające warunek

$$X_1^\dagger S^\dagger S X_1 = X_1^\dagger S S^\dagger X_1 \quad (16)$$

lub co najmniej zagwarantować ich istnienie. Następujące dwa proste przypadki spełniają ten warunek:

- (1) Jeśli  $S$  jest samosprężona, to warunek (16) jest oczywiście spełniony, co więcej, stan jest wówczas PPT-niezmienniczy, tzn.  $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$  i w konsekwencji  $\rho_{AB} = \rho_{AB}^{T_A}$ .
- (2) Jeśli macierz  $X_1$  ma maksymalny rząd (równy  $d$ ), to warunek (16) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy macierz  $S$  jest normalna, tzn.  $[S, S^\dagger] = 0$ . Dla układów  $2 \otimes d$  każdy stan o rzędzie co najmniej  $d$  może być zapisany w kanonicznej postaci z wykorzystaniem normalnej macierzy  $S$  jako

$$\rho_{AB} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbb{1} & S \\ \hline S^\dagger & S^\dagger S \end{array} \right]. \quad (17)$$

Oczywiście, są to stany SPPT, dla których  $X_1 = \mathbb{1}$  oraz  $X_2 = 0$ .

W obu przypadkach, tak skonstruowane stany SPPT są separowalne, jako stany układu  $2 \otimes d$  o rzędzie co najmniej  $d$ . Uogólnieniem reprezentacji (17) jest sytuacja, gdy stan

$$\rho_{AB} = \left[ \begin{array}{c|c} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \hline \rho_{21} & \rho_{22} \end{array} \right], \quad (18)$$

nie ma w danej bazie postaci kanonicznej, ale blok  $\rho_{11}$  ma maksymalny rząd. Wówczas reprezentację SPPT takiego stanu można znaleźć wtedy i tylko wtedy gdy [1, Tw. 3.19]

$$\rho_{12}^\dagger \rho_{11}^{-1} \rho_{12} = \rho_{12} \rho_{11}^{-1} \rho_{12}^\dagger. \quad (19)$$

Gdy  $\text{rank}(\rho_{11}) = r < d$  sytuacja się komplikuje, ale nadal możliwe jest reprezentowanie takiego stanu w postaci SPPT, o ile spełniony jest warunek [1, Tw. 3.20]

$$s_{11}^\dagger s_{11} + s_{21}^\dagger s_{21} = s_{11} s_{11}^\dagger + s_{12} s_{12}^\dagger, \quad (20)$$

gdzie  $s_{ik}$  są blokami macierzy  $S$ , takimi że wymiar  $s_{11}$  jest  $r \times r$ ,

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}.$$

Co ciekawe okazało się, że stany klasyczno-kwantowe i kwantowo-klasyczne (3) w układach  $2 \otimes d$  (ale już nie  $3 \otimes d$ ) mogą być reprezentowane w postaci SSPPT. Po raz pierwszy zwrócono na to uwagę w [10], a później, w nieco innej formie, przedstawiłem ten fakt w [1, Tw. 3.21].

#### 5.4. Szacowanie zgodności z wykorzystaniem świadków splątania

W przypadku wielu miar splątania potrafimy je łatwo obliczyć dla stanów czystych i niewielkiej rodziny stanów o wysokiej symetrii (stany Wernera, izotropowe, ortogonalnie niezmiennicze). Dlatego kluczowe jest szukanie obliczalnych oszacowań miar splątania i badanie ich wzajemnych zależności.

Wśród miar splątania podstawowe znaczenie ma entropia splątania jako jedna z najbardziej naturalnych wielkości teorio-informacyjnych. W przypadku układów  $2 \otimes 2$  do jej wyznaczenia potrzebna jest *zgodność* (*ang.* concurrence), która jest jedną z wielu wielkości używanych do oceny stopnia splątania stanów, nie jest jednak miarą splątania w ścisłym znaczeniu (nie redukuje się do entropii splątania dla stanów czystych). Należy jednak pamiętać, że inne miary splątania pozwalają często ocenić ilościowo inne aspekty splątania, związane z inną strategią jego wykorzystania.

Niech  $|\psi_{AB}\rangle$  będzie stanem czystym w układzie  $d \otimes d$ . Zgodność stanu czystego definiuje się jako

$$\mathcal{C}(|\psi_{AB}\rangle) = \sqrt{2(1 - \text{tr} \rho_A^2)}.$$

Rozszerzenie na stany mieszane przeprowadza się w oparciu o konstrukcję otoczki wypukłej (por. np. [1, Def. 3.15]):

$$\mathcal{C}(\rho) = \text{co } \mathcal{C}(\rho) = \inf_{\{p_k, |\psi_k\rangle\}} \left\{ \sum_k p_k \mathcal{C}(|\psi_k\rangle) : \rho = \sum_k p_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k| \right\}. \quad (21)$$

Prosty rachunek pokazuje, że zgodność dla stanu czystego jest następującą funkcją jego współczynników Schmidta:

$$\mathcal{C}(|\psi_{AB}\rangle) = 2 \sqrt{\sum_{i < j} \mu_i \mu_j}. \quad (22)$$

Zgodność dla stanów mieszanych dwóch kubitów ( $d = 2$ ) wyznaczył Wootters w następującej postaci:

$$\mathcal{C}(\rho) = \max\{0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}\}, \quad (23)$$

gdzie  $\lambda_k$  są wartościami osobliwymi niehermitowskiej macierzy  $\rho \tilde{\rho}$  uporządkowanymi nierosnąco, gdzie  $\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^* (\sigma_y \otimes \sigma_y)$  jest macierzą odpowiadającą transformacji odwrócenia

spinu. Wzór (23) nie przenosi się na wyższe wymiary  $d > 2$ , ale podobnego typu wyrażenie można uzyskać jako dolne ograniczenie zgodności. W [1, Rozdz. 3.5.1] określiłem tego typu oszacowania zgodności jako *algebraiczne*, ale warto także wspomnieć o innych sposobach szacowania z wykorzystaniem norm (śladowej, tzw. cross norm, i innych) (por. [1, Rozdz. 3.5.2]), świadków splątania i odwzorowań dodatnich. Zwłaszcza ostatnie dwie metody były przeze mnie analizowane w [11, 12] oraz w [1, Rozdz. 3.5.3 oraz Rozdz. 3.5.4].

Możliwość oszacowania zgodności z użyciem świadków splątania opiera się na następującej obserwacji [1, Tw. 3.29]: niech  $f[\rho]$  będzie wypukłym funkcjonałem na zbiorze stanów układu złożonego  $d \otimes d$  spełniającym warunek

$$f[|\psi\rangle\langle\psi|] \leq 2 \sum_{k < l} \sqrt{\mu_k \mu_l} \quad (24)$$

dla dowolnego stanu czystego o współczynnikach Schmidta  $\sqrt{\mu_k}$ . Wówczas zgodność

$$C(\rho) \geq \sqrt{\frac{2}{d(d-1)}} \max\{0, f[\rho]\}.$$

Funkcjonał  $f$  można wybrać jako

$$f[\rho] = -\text{tr}(\rho W),$$

gdzie  $W$  jest świadkiem splątania stanu  $\rho$ . Wówczas, o ile spełniony będzie warunek (24), tzn.

$$-\langle\psi|W|\psi\rangle \leq 2 \sum_{k < l} \sqrt{\mu_k \mu_l}, \quad (25)$$

to świadek  $W$  wykrywający splątanie  $\rho$  wprowadza następujące oszacowanie zgodności:

$$C(\rho) \geq \sqrt{\frac{2}{d(d-1)}} |\text{tr}(\rho W)|. \quad (26)$$

Wydaje się, że warunek (25) wyróżnia pewną klasę świadków spełniających go, ale w rzeczywistości każdy świadek po odpowiednim przeskalowaniu, może go spełnić, a tym samym może być użyty do oszacowania zgodności [11, 12]. Rzeczywiście, jeśli  $W$  jest świadkiem splątania  $\rho$ , to także  $\alpha^{-1}W$  przy  $\alpha > 0$  jest świadkiem — świadek jest określony z dokładnością do przeskalowania o dodatnią stałą. Zauważmy ponadto, że dla stanu czystego o rozkładzie Schmidta

$$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^d \sqrt{\mu_k} |a_k\rangle \otimes |b_k\rangle \quad (27)$$

wartość średnią  $W$  w tym stanie można zapisać jako

$$\langle\psi|W|\psi\rangle = \sum_{k,l} \sqrt{\mu_k \mu_l} A_{kl}^{(W)}(\psi),$$

gdzie macierz  $A^{(W)}(\psi)$  ma elementy określone jako

$$A_{kl}^{(W)}(\psi) = \text{Re} \langle a_k | \otimes \langle b_k | W | a_l \rangle \otimes | b_l \rangle. \quad (28)$$

W szczególności elementy diagonalne  $A_{kk}^{(W)} = \langle a_k | \otimes \langle b_k | W | a_k \rangle \otimes | b_k \rangle$  są wartościami średnimi  $W$  na stanach separowalnych, dlatego

$$A_{kk}^{(W)}(\psi) \geq 0. \quad (29)$$

W nowej notacji warunek (25) jest równoważny następującemu:

$$\sum_{k,l} \sqrt{\mu_k \mu_l} (A_{kl}^{(W)}(\psi) + 1) \geq 1. \quad (30)$$

Wprowadźmy wielkość

$$-\lambda(W) := \min_{\psi} \min_{k \neq l} A_{kl}^{(W)}(\psi), \quad (31)$$

która daje nową charakterystykę świadka w języku elementów macierzowych wielkości  $A^{(W)}(\psi)$ . Z praktycznego punktu widzenia wielkości (28), dla ustalonego świadka  $W$ , są wielomianami w zmiennych  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_j^{(k)}, y_s^{(l)})$  stanowiących współrzędne wektorów w rozkładzie Schmidta, tj.  $|a_k\rangle = [x_1^{(k)}, \dots, x_d^{(k)}]$ ,  $|b_l\rangle = [y_1^{(l)}, \dots, y_d^{(l)}]$ . W tym kontekście  $-\lambda(W)$  jest minimalną wartością przyjmowaną przez całą rodzinę wielomianów utworzonych z pozadiagonalnych elementów wielkości (28). Gdyby  $\min_{\psi} \min_{k \neq l} A_{kl}^{(W)}(\psi) \geq 0$ , to  $W$  nie mógłby wykrywać żadnego stanu splątanego, zatem poszukiwane minimum jest ujemne, a w konsekwencji  $\lambda(W) > 0$ . Dlatego dla każdego świadka  $W$  wykrywającego stan  $\rho$ , przeskalowany świadek  $W_{\alpha} = \alpha^{-1}W$  spełnia warunek (30), o ile  $\alpha \geq \lambda(W)$ . Tym samym  $W_{\alpha}$  może posłużyć do następującego oszacowania zgodności:

$$C(\rho) \geq \sqrt{\frac{2}{d(d-1)}} |\text{tr}(\rho W_{\alpha})|. \quad (32)$$

Procedurę szacowania zgodności stanu  $\rho$  wykrywanego przez świadka  $W$  można zatem podsumować na następującym diagramie:

$$W \xrightarrow{(1)} W' \xrightarrow{(2)} A_{kl}^{(W')} \xrightarrow{(3)} \lambda(W') \xrightarrow{(4)} W_{\lambda} \xrightarrow{(5)} \text{tr}(W_{\lambda} \rho),$$

gdzie kolejne kroki oznaczają

- (1) wyznaczenie  $\kappa = \min_k A_{kk}^{(W)}$ . Jeśli  $\kappa > 0$ , to należy skonstruować przesuniętego świadka  $W' = W - \kappa \mathbb{1}$ ,
- (2) wyznaczenie rodziny wielomianów  $\{W_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}$  odpowiadających pozadiagonalnym elementom  $A^{(W')}(\psi)$ ,
- (3) wyznaczenie wspólnego ograniczenia dolnego  $\lambda(W')$  rodziny wielomianów  $\{W_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}$ ,
- (4) wyznaczenie przeskalowanego świadka  $W_{\lambda} = \lambda^{-1}W'$ ,
- (5) oszacowanie zgodności.

Oszacowania przy użyciu świadków splątania mają dwie zalety w porównaniu z tymi, które można otrzymać innymi metodami,

- (1) jeśli znamy świadka splątania danego stanu, to analityczne obliczenie oszacowania zgodności jest o wiele prostsze niż innymi metodami opartymi np. o ekstremalizację, chociaż wielkość  $\lambda(W)$  często musi być wyznaczana numerycznie,
- (2) w zasadzie, oszacowanie przy użyciu świadka jest mierzalne bezpośrednio w doświadczeniu, jako wartość średnia samosprężonego operatora w stanie kwantowym.

Idąc krok dalej, oszacowania zgodności jakie dają świadkowie splątania można przenieść na oszacowania wprowadzane bezpośrednio przez odwzorowania dodatnie (por. [1, Rozdz. 3.5.4]).<sup>4</sup> Odwzorowania dodatnie, które nie są zupełnie dodatnie (n-CP), pełnią ważną funkcję przy

<sup>4</sup> Przypomnijmy, że odwzorowanie  $\Phi : M_d \rightarrow M_d$ , gdzie  $M_d$  oznacza zbiór macierzy  $d \times d$ , nazywamy — *dodatnim*, jeśli zachowuje hermitowskość i dodatnią półokreśloność macierzy, — *k-dodatnim*, jeśli wzmocnienie odwzorowania, tj.  $\mathbb{1}_k \otimes \Phi : M_k \otimes M_d \rightarrow M_k \otimes M_d$  jest dodatnie,

detekcji splątania (por. [1, Rozdz. 3.2.7]) oraz przy konstrukcji świadków splątania w oparciu o izomorfizmowi Choi-Jamiołkowskiego  $\mathcal{J} : \Phi \mapsto W_\Phi$  określony jako

$$W_\Phi = \mathcal{J}(\Phi) := \sum_{i,j=1}^d |i\rangle\langle j| \otimes \Phi(|i\rangle\langle j|),$$

gdzie  $\{|i\rangle\}$  jest bazą zero-jedynkową w  $\mathbb{C}^d$ .<sup>5</sup> Załóżmy, że bazy Schmidta (27)  $\{|a_k\rangle\}$ ,  $\{|b_k\rangle\}$  wektora  $|\psi\rangle$  mają współrzędne

$$|a_k\rangle = [a_1^{(k)}, \dots, a_d^{(k)}], \quad |b_k\rangle = [b_1^{(k)}, \dots, b_d^{(k)}].$$

Wówczas dla  $k \neq l$  wielkości  $A_{kl}^{(\Phi)}(\psi)$ , analogiczne do (28), ale odpowiadające odwzorowaniu  $\Phi$ , są postaci

$$\begin{aligned} A_{kl}^{(\Phi)}(|a_k\rangle, |b_l\rangle) &= \sum_{i,j} \operatorname{Re} \left[ \langle a_k | i \rangle \langle j | a_l \rangle \langle b_k | \Phi(|i\rangle\langle j|) | b_l \rangle \right] \\ &= \sum_{i,j} \sum_{p,q} \operatorname{Re} \left[ \Phi_{pq}^{ij} a_i^{(k)} a_j^{(l)*} b_p^{(k)} b_q^{(l)*} \right], \end{aligned}$$

gdzie

$$\Phi_{pq}^{ij} = \langle p | \Phi(|i\rangle\langle j|) | q \rangle. \quad (33)$$

Oszacowanie zgodności, wynikające bezpośrednio z (32), przyjmuje postać

$$C(\rho) \geq \sqrt{\frac{2}{d(d-1)}} (\lambda(\Phi))^{-1} |\operatorname{tr}(\rho(\mathbb{1} \otimes \Phi)(\Pi_d^+))|, \quad (34)$$

gdzie

$$-\lambda(\Phi) = \min_{|a_k\rangle, |b_l\rangle} \min_{k \neq l} A_{kl}^{(\Phi)}(|a_k\rangle, |b_l\rangle)$$

Niestety, w większości przypadków wielkość  $\lambda(\Phi)$  musi być wyznaczana numerycznie z uwagi na zbyt dużą liczbę zmiennych i wielomianowy charakter więzów.

## 5.5. Badanie własności kwantowego dyskordu opartego o entropię Tsallisa

Formalnie definicja kwantowego dyskordu (5) może zostać rozszerzona dzięki wykorzystaniu do obliczeń klasycznych oraz całkowitych korelacji uogólnionych funkcji entropowych (omawianych np. w [1, Rozdz. 1.4]), w szczególności entropii Tsallisa

$$T_q(X) = \frac{1 - \operatorname{tr} \rho_X^q}{q - 1}, \quad q > 0, \quad q \neq 1, \quad X = A, B, AB \quad (35)$$

- *zupełnie dodatnim* (CP), jeśli odwzorowanie  $\mathbb{1}_k \otimes \Phi : M_k \otimes M_d \rightarrow M_k \otimes M_d$  jest dodatnie dla  $k \leq d$ ,
- *rozkładalnym*, jeśli istnieją zupełnie dodatnie odwzorowania  $\Phi_1$  i  $\Phi_2$ , takie że  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 \circ T$ .

<sup>5</sup> Izomorfizm  $\mathcal{J}$  wprowadza 1-1 odpowiedniość pomiędzy zbiorem przekształceń liniowych  $\{\Phi : M_d \rightarrow M_d\}$ , a zbiorem świadków splątania  $\{W_\Phi\}$  o następujących własnościach [1, Rozdz. 1.5.2]

- (1)  $\Phi$  jest odwzorowaniem CP wtedy i tylko wtedy, gdy  $W_\Phi$  jest dodatnio półokreślone.
- (2)  $\Phi$  jest odwzorowaniem n-CP, wtedy i tylko wtedy, gdy  $W_\Phi$  jest operatorem blokowo dodatnim, który nie jest dodatni, tzn.

$$\langle x | \otimes \langle y | W_\Phi | x \rangle \otimes | y \rangle \geq 0, \quad \forall |x\rangle, |y\rangle.$$

- (3)  $\Phi$  jest odwzorowaniem rozkładalnym wtedy i tylko wtedy, gdy  $W_\Phi$  jest rozkładalne, tzn.  $W_\Phi = W_1 + W_2^{TB}$  przy pewnych dodatnio półokreślonych operatorach  $W_1, W_2$ .

lub Renyi'ego

$$R_q(X) = \frac{\ln(\text{tr } \rho_X^q)}{q-1}, \quad q > 0, \quad q \neq 1, \quad X = A, B, AB,$$

gdzie  $\rho_{AB}$ ,  $\rho_A$ ,  $\rho_B$  oznaczają odpowiednio stan układu złożonego AB, redukcję do podukładu A oraz redukcję do podukładu B.

Funkcje te, uogólniające entropię von Neumanna<sup>6</sup>, z powodzeniem wykorzystywane były przy detekcji splątania (szerokie omówienie i podsumowanie tego kierunku badań można znaleźć w [1, Rozdz. 3.2.3]) dając większe możliwości jego ilościowego opisu niż entropia von Neumanna. Mając nadzieję, że podobna sytuacja ma miejsce także przy badaniu dyskor-du, wprowadziłem *kwantowy  $q$ -dyskord* oparty o entropię Tsallisa [13, 14, 15], a także [1, Rozdz. 4.4].

Kwantowy  $q$ -dyskord (ze strony podukładu A) definiuję jako (por. (5))

$$D_{qAB} := I_{qAB} - C_{qAB}, \quad (36)$$

gdzie

$$I_{qAB} = T_q(A) - \frac{T_q(B) - T_q(AB)}{1 + (1-q)T_q(B)} = T_q(A) - T_q(A|B)$$

jest wzajemną entropią Tsallisa (odpowiednikiem wzajemnej entropii von Neumanna obejmującej wszystkie korelacje w stanie  $\rho_{AB}$ ), a

$$C_{qAB} = T_q(A) - \inf_{\{\Pi^B\}} T_q(A|\{\Pi^B\})$$

jest wzajemną entropią Tsallisa warunkowaną pomiarem  $\Pi^B$  (odpowiednikiem wzajemnej entropii von Neumanna warunkowanej pomiarem obejmującej korelacje klasyczne w stanie  $\rho_{AB}$ ). Wielkość

$$T_q(A|\{\Pi^B\}) = \frac{\sum_k p_k^q T_q(\rho_k^A)}{\sum_k p_k^q} \quad (37)$$

jest entropią Tsallisa podukładu A warunkowaną pomiarem na podukładzie B reprezentowanym przez ansambl stanów po pomiarze  $\{p_k, \rho_k^A\}$ . Łatwo sprawdzić, że kwantowy  $q$ -dyskord może być również zapisany jako

$$D_{qAB} = \inf_{\{\Pi^B\}} T_q(A|\{\Pi^B\}) - T_q(A|B), \quad (38)$$

gdzie pierwszy składnik wymaga optymalizacji po pomiarach na podukładzie B, a drugi składnik jest warunkową entropią Tsallisa badanego stanu niezależną od pomiaru. Zauważmy dwie podstawowe różnice nowo-zdefiniowanej wielkości w stosunku do zwykłego dyskor-du:

- (1) w definicji  $q$ -dyskor-du wykorzystywana jest jednoparametrowa rodzina entropii Tsallisa (35) indeksowana  $q > 0$ . Pozwala to na klasyfikowanie zachowania się korelacji kwantowych w zależności od wartości  $q$ ,
- (2) relacja (37) wykorzystuje zmodyfikowaną procedurę uśredniania po ansamblu (zmodyfikowaną relację Holewo) (szczegółowa dyskusja w [1, Rozdz. 1.4]).

W [1, Rozdz. 4.4] przeprowadziłem obliczenia  $q$ -dyskor-du dla dwukubitowych stanów Wernera i izotropowych pokazując analitycznie, że dla tych klas wysoce symetrycznych stanów jest on nieujemny i zeruje się tylko dla stanu maksymalnie zmieszanego, w przeciwieństwie do innych proponowanych miar opartych o entropię Tsallisa. Należy podkreślić, że  $q$ -dyskord z

<sup>6</sup> Obie funkcje  $T_q$  oraz  $R_q$  odtwarzają entropię von Neumanna  $H$  w granicy  $q \rightarrow 1$ .

uwagi na indeksowanie go ciągłym parametrem daje możliwość pewnej selekcji cech korelacji kwantowych z wykorzystaniem tego parametru. Niestety, wartości  $q$ -dyskordu nie zachowują się monotonicznie względem  $q$  dla wszystkich stanów symetrycznych. Poza tym obliczenia  $q$ -dyskordu dla pewnej szczególnej rodziny stanów cyklicznych pokazują, że może on przyjmować wartości ujemne przy  $q \geq 2$ , co w znaczący sposób ogranicza potencjalne jego zastosowanie jako miary korelacji kwantowych, nie wyklucza takiej możliwości jednak zupełnie. Obliczenia numeryczne wskazują, że  $q$ -dyskord pozostaje nieujemny dla szerokiej klasy stanów przy  $0 < q \leq 1$ .

Podsumowując zakres moich badań w obszarze korelacji kwantowych, ich wykrywania i ilościowej charakteryzacji:

- (1) badaliśmy szeroką podklasę stanów cyklicznych  $3 \otimes 3$ . Pokazaliśmy, że część z nich jest splątana (stany  $\varrho(\mathbf{1}, \varepsilon)$ ), co do innych wysunęliśmy hipotezę o związku ich separowalności i splątania z pojęciem dominującej diagonalii macierzy,
- (2) pokazaliśmy, że w przypadku operatora cyklicznego działającego na  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^d$  można go zawsze zareprezentować (w odpowiedniej bazie) przez rzeczywistą macierz, co więcej, w tej bazie kresy lokalnego zakresu numerycznego (LNR) są osiągnięte na wektorach o rzeczywistych składowych. Dla  $d = 2$  kresy te wyznaczyliśmy w analitycznej postaci, tym samym podając LNR,
- (3) zdefiniowaliśmy i przebadaliśmy duże klasy stanów PPT nazwane SPPT i SSPPT, przy czym

$$\text{SSPPT} \subset \text{SPPT} \subset \text{PPT}.$$

Pokazaliśmy, że stany  $\text{SSPPT} \subset \text{SEP}$  oraz  $\text{SPPT}(d \leq 4) \subset \text{SEP}$ , gdzie  $\text{SPPT}(d \leq 4)$  oznacza zbiór stanów SPPT wymiaru  $2 \otimes d$  dla  $d \leq 4$ ,

- (4) podaliśmy warunki, przy których dowolny stan układu złożonego  $2 \otimes d$  ma reprezentację SPPT (z punktu widzenia jednego z podukładów). W szczególności wykazaliśmy, że wszystkie stany klasyczno-kwantowe i kwantowo-klasyczne w układzie  $2 \otimes d$  (ale już nie  $3 \otimes d$ ) mogą być reprezentowane w postaci SSPPT,
- (5) wprowadziliśmy metodę szacowania zgodności w oparciu o świadków splątania. Pokazaliśmy, że każdy świadek wykrywający splątanie danego stanu układu złożonego, może być po odpowiednim przeskalowaniu użyty do oszacowania zgodności. Optymalna wielkość tego przeskalowania  $\lambda(W)$  jest nowym parametrem charakteryzującym go. Podobną wielkość wprowadziliśmy dla odwzorowań  $n$ -CP (dodatnich ale nie zupełnie dodatnich),
- (6) zdefiniowaliśmy miarę korelacji kwantowych, która jest rodzajem kwantowego dyskordu, ale opartego o entropię Tsallisa ( $q$ -dyskord). Pokazaliśmy, że jest ona dobrze określona (nieujemna) dla stanów dwóch kubitów o wysokiej symetrii (Wernera i izotropowych). Obliczyliśmy ją dla klasy stanów cyklicznych. Przedyskutowaliśmy i porównaliśmy  $q$ -dyskord z innymi, podobnymi wielkościami,
- (7) w napisanej przeze mnie monografii [1] znalazło się wiele analiz wielkości opisujących korelacje dla stanów symetrycznych (Wernera, izotropowych, ortogonalnych) i cyklicznych. Zawarto tam też dyskusję entropowych wielkości używanych do ilościowego opisu korelacji, w tym kwantowego dyskordu i wprowadzonego przez autora  $q$ -dyskordu.

## 6. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych

### 6.1. Metody algebraiczne rozwiązywania cząstkowych równań różniczkowych

Moje wcześniejsze (z okresu przed doktoratem) zainteresowania dotyczyły również tematyki kształtu linii widmowych, a w szczególności wpływu na kształt linii aparatury pomiarowej [16, 17]. Okazało się, że profil linii  $I(\omega)$  można wyznaczyć w oparciu o rozwiązania pewnych cząstkowych równań różniczkowych. Przy dodatkowych założeniach rozwiązania te można uzyskać analitycznie [18] wykorzystując metody algebr Liego operatorów różniczkowych zainicjowane m.in. przez J. Wei i E. Normana [19].

Szerokość, przesunięcie w stosunku do częstotliwości niezaburzonej i ewentualna asymetria linii są ściśle związane z warunkami, w jakich powstaje linia: zależą od temperatury i ciśnienia gazu, który świeci, a także wpływu innych gazów, które w wyniku zderzeń zmieniają parametry ruchu emiterów.

W najprostszym przybliżeniu, jeśli zaniedbać wpływ zderzeń świecących atomów gazu z innymi cząstkami, profil linii (tzw. profil Voigta) jest symetryczny i uwzględnia szerokość oraz przesunięcie dopplerowskie (związane z ruchem emiterów) i ciśnieniowe (związaną z ciśnieniem emitującego linie gazu). Doświadczalny profil linii jest na ogół splotem profilu Voigta z tzw. funkcją aparaturową, która opisuje wpływ przyrządu pomiarowego (np. zastosowanego w doświadczeniu interferometru) na parametry linii.

W bardziej zaawansowanych modelach trzeba uwzględnić wpływ zderzeń na kształt linii, w szczególności wpływ zmiany prędkości emitera po zderzeniu z zaburzającym atomem na przesunięcie i szerokość linii. Kształt profilu może być wyznaczony w oparciu o funkcję rozkładu  $F(t, \vec{v})$ , zależną od czasu i od wektora prędkości  $\vec{v}$  oraz spełniającej następujące równanie kinetyczne typu Boltzmann:

$$\frac{\partial}{\partial t} F(t, \vec{v}) = -i(\omega_0 + \vec{k} \cdot \vec{v})F(t, \vec{v}) + \hat{S}F(t, \vec{v}),$$

gdzie  $\omega_0$  jest częstością niezaburzonej linii, a  $\vec{k}$  wektorem falowym emitowanego światła. W członie  $\hat{S}F(t, \vec{v})$  ukryte są poprawki zderzeniowe. W przybliżeniu miękkich zderzeń oraz kwadratowej zależności zderzeniowej szerokości i przesunięcia linii od prędkości, wyznaczenie kształtu linii sprowadza się w końcowym etapie do wyznaczenia rozwiązania równania różniczkowego postaci

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t, x) = \hat{A}G(t, x), \quad G(0, x) = e^{-x^2}, \quad (39)$$

w którym różniczkowy operator  $\hat{A}$  ma postać

$$\hat{A} = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x \frac{\partial}{\partial x} + c_5 \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad (40)$$

gdzie  $c_k$  są danymi liczbami zespolonymi.

Z punktu widzenia teorii algebr Liego operator różniczkowy (40) jest elementem algebry rozpinanej przez bazę [21]

$$\left\{ \hat{e}_1 = 1, \hat{e}_2 = x, \hat{e}_3 = x^2, \hat{e}_4 = x \frac{\partial}{\partial x}, \hat{e}_5 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \hat{e}_6 = \frac{\partial}{\partial x} \right\},$$

zatem rozwiązanie równania (39) należy do orbity działania odpowiedniej grupy Liego na stan początkowy  $G(0, x)$ , tzn.

$$G(t, x) = e^{t\hat{A}}G(0, x). \quad (41)$$



Metody znajdowania orbit działania grup Liego są znane i bazują między innymi na pracach [19, 21]. To, co znacznie upraszcza (lub wręcz umożliwia w tym przypadku) analityczne obliczenia, to warunek początkowy  $G(0, x)$  w postaci funkcji Gaussa, tzn. funkcji należącej do rodziny

$$\{e^{-(x-\mu)^2/\sigma^2} : \sigma^2 > 0, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Łatwo zauważyć w oparciu o formułę Bakera-Hausdorffa, że istnieją funkcje  $g_k(t)$ ,  $k = 1, \dots, 6$ , które pozwalają zapisać orbitę działania grupy (41) w postaci rozwinięcia

$$G(t, x) = \exp[g_1(t) + g_2(t)x + g_3(t)x^2] \exp\left[g_4(t)x \frac{\partial}{\partial x}\right] \\ \times \exp\left[g_5(t)x \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] \exp\left[g_6(t) \frac{\partial}{\partial x}\right] e^{-x^2}, \quad (42)$$

w którym każdy operator  $\exp[g_k(t)\hat{e}_k]$  przekształca funkcję Gaussa w inną funkcję z tej rodziny (szczegóły w pracy [18]). Zatem rozwiązanie można zapisać w postaci

$$G(t, x) = \exp[h_1(t) + h_2(t)x + h_3(t)x^2],$$

gdzie funkcje  $h_k(t)$  spełniają układ zwyczajnych równań różniczkowych, który można rozwiązać analitycznie [18]! Znajomość  $G(t, x)$  pozwala wyznaczyć  $F(t, \vec{v})$  w przybliżeniu miękkich zderzeń i kwadratowej zależności szerokości zderzeniowej oraz przesunięcia zderzeniowej linii od prędkości, a w konsekwencji — kształt linii  $I(\omega)$ :

$$I(\omega) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{i\omega t} \Phi(t) dt, \quad \Phi(t) = \int_{\mathbb{R}^3} F(t, \vec{v}) d\vec{v}.$$

Podsumowując ten zakres moich badań:

- (1) używając metod algebraicznych w zastosowaniu do szczególnej algebry Liego operatorów różniczkowych podaliśmy rozwiązanie pewnej klasy równań kinetycznych Boltzmanna z operatorem zderzeniowym typu Fokkera-Plancka uwzględniającym zderzenia zmieniające prędkość oraz szczególną, kwadratową zależność szerokości i przesunięcia linii od prędkości,
- (2) przedyskutowaliśmy wpływ wprowadzonych efektów na kształt profilu linii widmowej i porównaliśmy szczególne przypadki ze znanymi wynikami.

## 6.2. Kwantowanie układów z dyssypacją

Kwantowy opis układów fizycznych, które podczas ewolucji tracą energię (np. na skutek różnego rodzaju oporów), przysparza po dziś dzień wiele kłopotów. Układy takie jako niehamiltonowskie, nie podlegają ogólnie przyjętym, kanonicznym metodom kwantowania. W zasadzie nie ma dla ich opisu miejsca w standardowym sformułowaniu mechaniki kwantowej opartej na przestrzeni Hilberta i równaniu Schrödingera, które wprowadza jednoparametrową rodzinę operatorów unitarnych określających odwracalną ewolucję. Wyjścia poza ten formalizm dostarcza kwantowa teoria układów otwartych dopuszczająca nieunitarną (opartą na półgrupie dynamicznej) ewolucję układów z dyssypacją [20]

Możliwe są jednak inne metody nieangażujące tak ogólnej teorii, np. kwantowanie deformacyjne oparte o klasyczną przestrzeń fazową wraz z nieprzemiennym sposobem składania (splatania) funkcji, czy też metody kwantowego opisu układu z dyssypacją oparte na

klasycznym równaniu ruchu (kwantowanie równania ruchu). Niestety, poza najprostszymi przypadkami, metody te są trudne do uogólnienia i bezpośredniego zastosowania.

Poniżej chciałbym się skupić na omówieniu różnych metod kanonicznego kwantowania modelu *tłumionego oscylatora harmonicznego* (*ang.* damped harmonic oscillator – DHO) opisywanego na gruncie klasycznym równaniem różniczkowym

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (43)$$

gdzie  $\gamma$  jest stałą tłumienia, a  $\omega_0$  częstością drgań własnych oscylatora, który jako jeden z najprostszych, a jednocześnie najistotniejszych modeli, od dawna jest badany i służy jako swoisty poligon dla różnych metod (krótkie ich omówienie i dalsze odnośniki można znaleźć w [22]). Pytania, jakie się pojawiają w tym przypadku dotyczą tego

- jak zareprezentować to równanie, aby możliwe było zapisanie jego kwantowego odpowiednika,
- jak rozwiązać ewentualne równanie kwantowe, wreszcie
- jak zinterpretować otrzymane wyniki, tzn. jak na poziomie kwantowym przejawia się dyssypacja?

Wszystkie te pytania okazują się być nietrywialne!

Już w roku 1931 Bateman [23] podjął próbę zareprezentowania DHO jako układu hamiltonowskiego z dodatkowym stopniem swobody  $y$ , który spełniałby „dualne” równanie ze zmienionym znakiem członu dyssypacyjnego:

$$\ddot{y} - 2\gamma\dot{y} + \omega_0^2 y = 0. \quad (44)$$

Parametr  $y$  pełni w tym podejściu rolę zmiennej rezerwuaru odpowiadającego za „odebranie” rozproszonej energii, tak aby cały układ DHO + rezerwar był izolowany. Stała ruchu (tzw. *hamiltonian Batemana*) układu dynamicznego (43) + (44) przyjmuje postać

$$H(x, y, p_x, p_y) = p_x p_y + \omega^2 x y - \gamma(x p_x - y p_y), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, \quad (45)$$

gdzie kanoniczne pędy  $p_x = \dot{y} - \gamma y$ ,  $p_y = \dot{x} + \gamma x$ . Niestety, taki hamiltonian nie opisuje energii układu nawet w granicy  $\gamma \rightarrow 0$ ! Niemniej dysponując hamiltonianem (45) Feshbach i Tichochinsky [24] przeprowadzili kanoniczną kwantyzację używając generatorów grupy SU(1,1) i wyznaczając energie oraz funkcje własne. Wartości własne kwantowego odpowiednika (45) indeksowane dwoma liczbami

$$j = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \dots, \quad m = |j|, |j| + 1, |j| + 2, \dots,$$

okazały się być zespolone

$$E_{jm}^\pm = 2\hbar\omega j \pm i\hbar\gamma(2m + 1), \quad (46)$$

a odpowiadające im funkcje własne — nienormowalne w przestrzeni Hilberta. Podkreślmy jednak, że operator Hamiltona rozważany przez Feshbacha i Tichochinsky’ego jest samo-sprzeżony. Liczne interpretacje i uogólnienia otrzymanych wyników były podawane przez wielu autorów (szeroką dyskusję tych problemów można znaleźć w pracy [25]).

W pracy [26] rozwinęliśmy inną metodę podejścia do problemu kwantowania DHO pokazując, m.in., że dziwne, zespolone wartości energii (46) samosprzeżonego operatora energii są związane z tzw. stanami rezonansowymi, znanymi doskonale z teorii rozpraszania. Nasze podejście bazowało na innej metodzie rozszerzenia (o dodatkowe stopnie swobody) klasycznej przestrzeni fazowej, tak aby otrzymać układ hamiltonowski. Zwróćmy bowiem uwagę za Pontriaginem [27], że dowolny układ dynamiczny

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N \quad (47)$$

gdzie  $\mathbf{X}$  jest dowolnym polem wektorowym na przestrzeni konfiguracyjnej  $\mathbb{R}^N$ , można rozszerzyć do układu hamiltonowskiego na  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$  z hamiltonianem

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{X}(\mathbf{x}) := \sum_{\ell=1}^N p_\ell X_\ell(\mathbf{x}). \quad (48)$$

Oczywiście połowa równań Hamiltona, tzn.

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$$

odtworza układ dynamiczny (47), podczas gdy druga połowa opisuje ewolucję dodatkowych stopni swobody

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}.$$

Kwantowanie takiego układu opiera się na transformacji Wignera-Weyla (WW) klasycznej funkcji Hamiltona (48), tzn.  $\hat{H}_{\text{quant}} = \text{WW}(H)$  (szczegóły w pracy [26]). Oczywiście  $\hat{H}_{\text{quant}}$  jest samosprzężonym operatorem na  $L^2(\mathbb{R}^N, d\mathbf{x})$ .

Zastosowanie tej metody do układu DHO napotyka jeszcze jedną niejednoznaczność: reprezentowanie równania różniczkowego II rzędu jako układu równań I rzędu. Przyjeliśmy układ równań na  $\mathbb{R}^2$  w postaci

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -\gamma x_1 + \omega x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\gamma x_2 - \omega x_1. \end{cases}$$

Układ powyższy nie jest hamiltonowski, ale metodą Pontriagina można go rozszerzyć do układu hamiltonowskiego na  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  z funkcją Hamiltona

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \omega(p_1 x_2 - p_2 x_1) - \gamma(p_1 x_1 + p_2 x_2). \quad (49)$$

Wówczas zmienne  $(x_1, x_2, p_1, p_2)$  są w bardzo prosty sposób związane ze zmiennymi hamiltonianu Batemana (45)

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{p_y}{\sqrt{\omega}}, & p_1 &= -\sqrt{\omega} y \\ x_2 &= -\sqrt{\omega} x, & p_2 &= -\frac{p_x}{\sqrt{\omega}}. \end{aligned}$$

Kwantowanie wygodnie jest przeprowadzić we współrzędnych biegunowych

$$x_1 + ix_2 = r e^{i\varphi}$$

wyrażając kwantowy operator Hamiltona jako

$$\hat{H}_{\text{quant}} = i\omega\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} + i\gamma\hbar \left( r \frac{\partial}{\partial r} + 1 \right).$$

na przestrzeni Hilberta  $L^2(\mathbb{R}^2, dx_1 dx_2) = L^2([0, 2\pi), d\varphi) \otimes L^2(\mathbb{R}_+, r dr)$ . Rozwiązując zagadnienie własne dla tego hamiltonianu,  $\hat{H}_{\text{quant}} \Psi_{l\lambda} = E_{l\lambda} \Psi_{l\lambda}$ , otrzymaliśmy energie własne [26, §4.2]

$$E_{l\lambda} = \hbar(l\omega + \lambda\gamma) \quad (50)$$

oraz funkcje własne

$$\Psi_{l\lambda}(r, \varphi) = \Phi_l(\varphi) \cdot R_\lambda(r) = \frac{1}{2\pi} r^{-(i\lambda+1)} e^{-i l \varphi},$$

gdzie  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  oraz  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Hamiltonian jest zatem nieograniczony i jego widmo  $\text{Sp}(\widehat{H}_{\text{quant}}) = \mathbb{R}$ . Co więcej, część radialna

$$R_\lambda(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} r^{-(i\lambda+1)},$$

nie jest funkcją z  $L^2(\mathbb{R}_+, r dr)$  i należy ją traktować jako dystrybucję.<sup>7</sup>

Jak pokazano w pracy [26, §5], dystrybucje  $\Psi_{l\lambda}$  wprowadzają (uogólniony do przestrzeni dystrybucji) rozkład spektralny hamiltonianu Batemana. Dzięki niezmienniczości hamiltonianu z uwagi na operację odwrócenia czasu, także dystrybucje powstałe przez zastosowanie operacji odwrócenia w czasie prowadzą do rozkładu spektralnego. Konieczne okazało się wprowadzenie dwóch klas funkcji testowych  $\mathcal{S}_\pm \subset L^2(\mathbb{R})$ , które w naturalny sposób prowadzą do dwóch rodzajów ewolucji: postępowej („do przodu w czasie”) i „cofającej” w czasie, prowadząc tym samym do jej nieodwracalności.<sup>8</sup>

Dodatkowo bieguny rezolwenty

$$\widehat{R}(\widehat{H}_{\text{quant}}, z) = (\widehat{H}_{\text{quant}} - z)^{-1}$$

rozpatrywanej na zbiorach  $\mathcal{S}_\pm$  mają postać

$$E_{nl}^\pm = \hbar l \omega \pm i \hbar \gamma (|l| + 2n + 1)$$

i pokrywają się z dyskretnymi zespolonymi wartościami własnymi energii  $E_{jm}^\pm$  danymi przez (46) po identyfikacji

$$j = \frac{l}{2}, \quad m = \frac{1}{2}(|l| + 2n) = |j| + n.$$

Ponieważ stany własne odpowiadające biegunom rezolwenty znane są w teorii rozpraszania jako *stany rezonansowe*, nasze rozważania prowadzą do wniosku o wzajemnych związkach pomiędzy rezonansami, dyssypacją i nieodwracalnością ewolucji. Nasze wyniki oznaczają także, że naturalnym językiem matematycznym do opisu tego układu jest formalizm dwóch trójek Gelfanda opartych o przestrzenie  $\mathcal{S}_\pm$  i ich dualne odpowiedniki  $\mathcal{S}'_\pm$  [29]:

$$\mathcal{S}_\pm \subset L^2(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{S}'_\pm.$$

<sup>7</sup> Oczywiście także funkcje własne  $\Psi_{l\lambda}(r, \varphi)$  są dystrybucjami, których działanie na funkcji testowej  $\phi(r, \varphi) \in \mathcal{S}$  jest następujące:

$$\Psi_{l\lambda}(\phi) = \langle \phi | \Psi_{l\lambda} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i l \varphi} r^{-i\lambda-1} \bar{\phi}(r, \varphi) dS = \int_0^\infty r^{-i\lambda} \bar{\phi}_l(r) dr,$$

gdzie  $dS = r dr d\varphi$  oraz

$$\phi_l(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i l \varphi} \phi(r, \varphi) d\varphi.$$

<sup>8</sup> Zbiory  $\mathcal{S}_\pm$  są zdefiniowane w następujący sposób: funkcja  $f^\pm: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  jest w klasie górnych (+) (dolnych (-)) funkcji Hardy’ego  $\mathcal{H}_\pm^2$ , jeśli  $f^\pm$  rozszerza się do funkcji analitycznej  $F^\pm$  określonej na górnej (dolnej) zespolonej półpłaszczyźnie  $\mathbb{C}^\pm$ , tak że dla  $K > 0$  zachodzi [28]

$$\sup_y \int_{\mathbb{R}} |F^\pm(x \pm iy)|^2 dx < K.$$

Wówczas  $\mathcal{S}_\pm$  jest podzbiorem funkcji testowych  $\mathcal{S}$  takim, że

$$\mathcal{S}_\pm = \{ \phi \in \mathcal{S} : \langle \phi | \Psi_{l\lambda} \rangle \in \mathcal{H}_\pm^2 \},$$

innymi słowy,  $\phi \in \mathcal{S}_\pm$ , jeśli funkcja  $\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto \langle \phi | \Psi_{l\lambda} \rangle \in \mathbb{C}$  jest w klasie funkcji Hardy’ego  $\mathcal{H}_\pm^2$ .

Dalszą dyskusję tych zagadnień, a w szczególności związku DHO z układem o dwuwymiarowym parabolicznym potencjale, można znaleźć w pracy [30].

Równanie DHO może być również reprezentowane przez układ hamiltonowski zależny od czasu. Prosty rachunek pokazuje, że równania Hamiltona dla hamiltonianu Caldirola-Kanaia

$$H_{\text{CK}}(x, p, t) = \frac{1}{2}m_0\omega^2x^2 e^{2\gamma t} + \frac{1}{2m_0}p^2 e^{-2\gamma t}. \quad (51)$$

również odtwarzają równanie DHO. Zwróćmy uwagę, że funkcja (51) ma postać energii oscylatora harmonicznego z masą zależną od czasu  $m(t) = m_0 e^{2\gamma t}$ , gdzie  $m_0 = m(0)$ . Nasuwa to pomysł, aby rozważyć funkcję Hamiltona z masą w dowolny sposób zależną od czasu, tzn.

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2m(t)} + \frac{1}{2}m(t)\omega^2x^2.$$

Wówczas odpowiednie równanie Newtona przyjmie postać

$$\ddot{x} + \frac{\dot{m}(t)}{m(t)}\dot{x} + \omega^2x = 0, \quad (52)$$

którą nazwiemy *uogólnionym równaniem oscylatora tłumionego* (GDHO) [31]. Problem, który badaliśmy w pracy [31] dotyczył tego jaką postać powinna mieć funkcja  $m(t)$ , aby

(1) w granicy dużych  $t$  równanie (52) przechodziło w równanie DHO, tzn.

$$\kappa(t) := \frac{1}{2} \frac{\dot{m}(t)}{m(t)} \longrightarrow \gamma,$$

(2) rozwiązania równania (52) opisywały drgania tłumione o stałej częstości  $\omega$  równej częstości drgań harmonicznym tłumionych

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}.$$

Rozważaliśmy także zagadnienie kwantowania otrzymanych układów.

Okazało się, że warunki (1)–(2) spełniają *tylko* funkcje postaci

$$\kappa(t) = \gamma \operatorname{tgh}(\gamma(t - t_0)) \quad \text{oraz} \quad \kappa(t) = \gamma,$$

gdzie  $t_0$  jest na tym etapie stałą całkowania. Prowadzą one do

$$m(t) = m_0 \cosh^2(\gamma(t - t_0)) \quad \text{oraz} \quad m(t) = m_0 e^{2\gamma(t - t_0)}$$

gdzie w obu modelach przyjęto  $m(t_0) = m_0$ . Oczywiście przypadek  $m(t) = m_0 e^{2\gamma(t - t_0)}$  prowadzi do modelu Caldirola-Kanaia (CK), którego kwantowa wersja była badana (por. [25]). Ale już na poziomie klasycznym rysuje się wyraźna różnica we właściwościach dynamiki w obu przypadkach: macierz  $\Lambda^{\text{CK}}(t, t_0)$  opisująca dynamikę w modelu CK

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \Lambda^{\text{CK}}(t; t_0) \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix}$$

spełnia prawo składania

$$\Lambda^{\text{CK}}(t_2; t_0) = \Lambda^{\text{CK}}(t_2; t_1) \circ \Lambda^{\text{CK}}(t_1; t_0)$$

podczas gdy analogiczna macierz  $\Lambda^{\text{GDHO}}(t; t_0)$  opisująca dynamikę drugiego modelu z  $m(t) = m_0 \cosh^2(\gamma(t - t_0))$ , tego prawa *nie spełnia!* Fakt ten skłania do interpretowania parametru

$t_0$  występującego w  $m(t) = m_0 \cosh^2(\gamma(t - t_0))$  jako odpowiedzialnego za efekty pamięci (w sensie niemarkowskiej dynamiki). Obserwacje te (bardziej szczegółowo dyskutowane w [31]) przenoszą się na poziom kwantowych odpowiedników omawianych układów. Efekty pamięci uwidaczniają się wówczas w łamaniu prawa składania kwantowych propagatorów

$$K(x, t; x_0, t_0) = \langle x | T \exp \left( -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H(t') dt' \right) | x_0 \rangle ,$$

określonych poprzez wybór operatorów Hamiltona  $H(t)$ . Uogólnienie tych obserwacji pozwoliło w [32] na pokazanie, że (całkowe) równanie ewolucji z pamięcią

$$\frac{d}{dt} \Lambda(t, t_0) = \int_{t_0}^t \mathcal{K}(t - \tau) \Lambda(\tau, t_0) d\tau$$

może być alternatywnie reprezentowane przez lokalne równanie różniczkowe

$$\frac{d}{dt} \Lambda(t, t_0) = \mathcal{L}(t - t_0) \Lambda(t, t_0) ,$$

w którym jednak w generatorze  $\mathcal{L}$  pozostaje informacja o chwili początkowej rozpoczęcia ewolucji  $t_0$ . Ta własność odróżnia równania lokalne z pamięcią od tych, które pamięci są pozbawione.

Podsumowując ten zakres moich badań:

- (1) używając metody Pontriagina i rozszerzając układ tłumionego oscylatora harmonicznego o dodatkowe stopnie swobody wprowadziliśmy hamiltonian dla tego układu, który odtwarza równanie ruchu tłumionego oscylatora. Pokazaliśmy, że wprowadzony hamiltonian jest równoważny hamiltonianowi Batemana,
- (2) zaproponowaliśmy metodę kanonicznego kwantowania otrzymanego układu hamiltonowskiego w zmiennych biegunowych, wyznaczając wartości własne operatora Hamiltona, jego funkcje własne i propagator Feynmana. Omówiliśmy także własności rozkładu spektralnego i rezolwentu,
- (3) pokazaliśmy, że dyskretne wartości własne hamiltonianu Batemana odpowiadają położeniu biegunów rezolwentu rozpatrywanych na przestrzeniach funkcji próbnych  $\mathcal{S}_\pm$ , a funkcje własne odpowiadające tym wartościom odpowiadają za pojawienie się stanów rezonansowych w tym układzie. Przestrzenie  $\mathcal{S}_\pm$  i dualne do nich  $\mathcal{S}'_\pm$  stanowią elementy dwóch trójek Gelfanda, które wprowadzają naturalne matematyczne środowisko do opisu układu DHO,
- (4) zaobserwowaliśmy, że pojawienie się stanów rezonansowych prowadzi do procesów dyssypacyjnych i nieodwracalnej dynamiki,
- (5) zinterpretowaliśmy ogólniejsze równania z dyssypacją (52), w których występuje zależność od chwili początkowej  $t_0$ , jako równania wprowadzające efekty pamięci. Pokazaliśmy, że obserwacje te przenoszą się na poziom kwantowy, prowadząc do łamania przez kwantowy propagator prawa składania.

## Literatura

- [1] J. Jurkowski, *Korelacje nieklasyczne. Kwantowe splątanie i dyskord*, Wyd. Naukowe UMK, Toruń, 2014.

- [2] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, K. Horodecki, *Quantum entanglement*, Rev. Mod. Phys. **81**, 865 (2009).
- [3] K. Modi, A. Brodutch, H. Cable, T. Paterek, and V. Vedral, *The classical-quantum boundary for correlations: Discord and related measures*, Rev. Mod. Phys. **84**, 1655 (2012).
- [4] L. C. Celeri, J. Maziero, R. M. Serra, *Theoretical and experimental aspects of quantum discord and related measures*, Int. J. Quant. Inf. **9**, 1837 (2011).
- [5] D. Chruściński, J. Jurkowski, A. Kossakowski, *Quantum States with Strong Positive Partial Transpose*, Phys. Rev. A **77**, 022113 (2008).
- [6] B. Bylicka, D. Chruściński, J. Jurkowski, *On separable decompositions of quantum states with strong positive partial transposes*, J. Phys. A: Math. Theor. **46**, 205303 (2013).
- [7] J. Jurkowski, D. Chruściński, A. Rutkowski, *A class of bound entangled states of two qutrits*, Open Sys. Information Dyn. **16** (2009) 235-242.
- [8] J. Jurkowski, A. Rutkowski, D. Chruściński, *Local Numerical Range for a Class of  $2 \times d$  Hermitian Operators*, Open Sys. Information Dyn. **17**, (2010) 347-359.
- [9] J. Jurkowski, *On numerical ranges of operators*, Quantum Probability and White Noise Analysis XXX, Quantum Bio-Informatics V, World Scientific, 2013, pp. 217-228.
- [10] B. Bylicka, D. Chruściński, *Witnessing quantum discord in  $2 \times N$  systems*, Phys. Rev. A **81**, 062102 (2010).
- [11] J. Jurkowski, D. Chruściński, *Estimating concurrence via entanglement witnesses*, Phys. Rev. A **81**, (2010) 052308.
- [12] J. Jurkowski, *Concurrence and its Estimations by Entanglement Witnesses*, Quantum Probability and White Noise Analysis XXVIII, Quantum Bio-Informatics IV, World Scientific, 2011, pp. 199-208.
- [13] J. Jurkowski, *Quantum Discord Derived from Tsallis Entropy*, Int. J. Quantum Information **11**, 1350013 (2013).
- [14] J. Jurkowski, *Discord Derived from Tsallis Entropy for Werner and Isotropic States*, w: *Symmetries and Groups in Contemporary Mathematics*, Ch. Bai, J.-P. Gazeau Mo-Lin Ge, eds., XXIX International Colloquium on Group-Theoretical Methods in Physics, Chern Institute of Mathematics, Tianjin, China, August 20-26, 2012, Nankai Series in Pure, Applied Math. and Theor. Phys. **11**, 615-618 (2013).
- [15] J. Jurkowski, *q-Discord for Generalized Entropy Functions*, w: *Geometric Methods in Physics*, XXX Workshop, Białowieża, 26.06-02.07.2011, P. Kielanowski, S. Twareque Ali, A. Odziejewicz, M. Schlichenmaier, T. Voronov, eds., Trends in Mathematics, Birkhäuser, 2013.
- [16] R. Ciuryło, A. Bielski, S. Brym, J. Jurkowski, *Response of Scanning Fabry-Pérot Interferometer to the Speed Dependent Voigt Profile*, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer **53**, No. 5, (1995) 493.
- [17] A. Bielski, S. Brym, R. Ciuryło, J. Jurkowski *Response of Scanning Fabry-Pérot Interferometer To Speed-Dependent Asymmetric Voigt Profile*, Acta Physica Polonica A **90**, 523 (1996).
- [18] R. Ciuryło, R. Jaworski, J. Jurkowski, J. Szudy, A. S. Pine, *Spectral line shapes modeled by a quadratic speed-dependent Galatry profile*, Phys. Rev. A **63**, 032507 (2001).
- [19] J. Wei, E. Norman, *Lie Algebraic Solution of Linear Differential Equations*, J. Math. Phys. **4**, 575 (1963).
- [20] H.-P. Breuer, F. Petruccione, *The theory of open quantum systems*, Oxford Univ. Press, Oxford, New York, 2002.
- [21] G. Dattoli, M. Richetta, G. Schettini, A. Torre, *Lie algebraic methods and solutions of linear partial differential equations*, J. Math. Phys. **31**, 2856 (1990).
- [22] J. Jurkowski, *An Introduction to Quantization of Dissipative Systems. The Damped Harmonic Oscillator Case*, Quantum Probability and White Noise Analysis XXVI, Quantum Bio-Informatics III, World Scientific, 2010, pp. 167-178,
- [23] H. Bateman, Phys. Rev. **38**, (1931) 815.
- [24] H. Feshbach and Y. Tikochinsky, in: A Festschrift for I.I. Rabi, Trans. New York Ac. Sc. Ser. 2 **38**, (1977) 44.  
Y. Tikochinsky, J. Math. Phys. **19** (1978) 888.
- [25] H. Dekker, Phys. Rep. **80**, (1981) 1-112.
- [26] D. Chruściński, J. Jurkowski, *Quantum Damped Oscillator I: Dissipation and Resonances*, Ann. Phys. **321**, 854-874 (2006).

- [27] L. S. Pontriagin, V. G. Baltanskij, R. V. Gamkrelidze, E. F. Miscenko, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Wiley, New York, 1962.
- [28] M. Gadella, F. Gomez-Cubillo and S. Wickramasekara, Hardy class functions for potential scattering and decay, *Rep. Math. Phys.* **62**, 129 (2008).
- [29] A. Bohm, H.-D. Doebner, P. Kielanowski, *Irreversibility and Causality, Semigroups and Rigged Hilbert Spaces*, *Lect. Notes Phys.* **504**, Springer, Berlin, 1998.
- [30] D. Chruściński, *Quantum damped oscillator II: Bateman's Hamiltonian vs. 2D parabolic potential barrier*, *Ann. Phys.* **321**, 840–853 (2006).
- [31] D. Chruściński, J. Jurkowski, *Memory in Nonlocally Damped Oscillator*, *Quantum Probability and White Noise Analysis XXVI, Quantum Bio-Informatics III*, World Scientific, 2010, pp. 155–166.
- [32] D. Chruściński, A. Kossakowski, *Non-Markovian Quantum Dynamics: Local versus Nonlocal*, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 070406 (2010).

## 7. Kierowanie i udział w projektach badawczych

- (1) Współwykonawca Grantu MENiS 3004/B/H03/2007/33,  
*Kwantowe splątanie: analiza i klasyfikacja*, 2007–2010.
- (2) Współwykonawca Grantu Narodowego Centrum Nauki,  
projekt DEC-2011/03/B/ST2/00136,  
*Kwantowe korelacje: analiza, detekcja i dynamika*

## 8. Referaty i udział w konferencjach

### 8.1. Referaty na konferencjach naukowych

- (1) 40th Symposium on Mathematical Physics, 25-28 czerwca 2008, „Geometry and Quanta”, referat: *Testing the new class of PPT states for entanglement*
- (2) Satellite Conference of ICQBIC09, Suwa, Japan, 6–7.03.2009, referat: *Introduction to quantisation of dissipative systems.*
- (3) ICQBIC09 International Conference on Quantum BioInformatics, Tokyo University of Science, Noda, Japan, 11–14.03.2009, referat: *Nonlocally damped harmonic oscillator and its quantisation.*
- (4) International Conference QBIC10, Tokyo University of Science, Noda, Japan, 10–13.03.2010, referat: *On estimations of entanglement measures.*
- (5) 28th International Colloquium on Group-Theoretical Methods in Physics, Northumbria University, New Castle, Great Britain, 26–30.07.2010, referat: *On estimations of entanglement measures,*
- (6) International Conference on Quantum Bio-Informatics, Tokyo University of Science, Noda, Japan, 7–14.03.2011, referat: *On local numerical ranges of operators,*
- (7) XXX Workshop on Geometric Methods in Physics, Białowieża, Poland, 26.06–2.07.2011, referat: *q-Discord for generalized entropies.*
- (8) XXIX International Colloquium on Group-Theoretical Methods in Physics, Chern Institute of Mathematics, Tianjin, China, 20–26.08.2012, poster: *Discord Derived from Tsallis Entropy for Werner and Isotropic States.*



## 8.2. Udział w konferencjach naukowych

- (1) XXVI Symposium on Mathematical Physics, Toruń, 1993.
- (2) Quantum Systems. New Trends and Method, Minsk, Belarus, 1994.
- (3) VI Workshop Open Systems & Information Dynamics, Toruń, 1994.
- (4) XXVII Symposium on Mathematical Physics, Toruń, 1994.
- (5) Hamiltonian and Lagrangian Mechanics, Warszawa, 05.1995.
- (6) Classical and Quantum Gauge Theory, Warszawa, 05.1995.
- (7) Classical and Quantum Gravity, Warszawa, 05.1995.
- (8) VI International Conference on Differential Geometry and Applications, Brno, 1995.
- (9) XXVIII Symposium on Mathematical Physics, Toruń, 1995.
- (10) VII Workshop Open Systems & Information Dynamics, Toruń, 1996.
- (11) XXI International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics, Goslar, July 1996.
- (12) XXIX Symposium on Mathematical Physics, Toruń, 1996.
- (13) Fifth International Wigner Symposium, Wiedeń, 25-29.08.1997.
- (14) VIII Workshop Open Systems & Information Dynamics, Toruń, 1998.
- (15) XXX Symposium on Mathematical Physics, Toruń, 1998.
- (16) XXXI Symposium on Mathematical Physics, 18-21 maja 1999, „Solitons and Nonlinear Phenomena”
- (17) 32nd Symposium on Mathematical Physics, 6-10 czerwca 2000, „Symmetries in Nonlinear Systems”
- (18) 33rd Symposium on Mathematical Physics, 5-9 czerwca 2001, „Nonholonomic Systems and Contact Structures”
- (19) 34th Symposium on Mathematical Physics, 14-18 czerwca 2002, „Physical and Control-Theoretic Applications of Sub-Riemannian and Finsler Geometries”
- (20) 35th Symposium on Mathematical Physics, 10-11 października 2003,
- (21) 36th Symposium on Mathematical Physics, 9-12 czerwca 2004, „Open Systems and Quantum Information”
- (22) 37th Symposium on Mathematical Physics, 17-18 czerwca 2005,
- (23) 38th Symposium on Mathematical Physics, 4-7 czerwca 2006, „Quantum Entanglement and Geometry”
- (24) 39th Symposium on Mathematical Physics, 11-12 czerwca 2007,
- (25) 40th Symposium on Mathematical Physics, 25-28 czerwca 2008, „Geometry and Quanta”,
- (26) 41st Symposium on Mathematical Physics, Toruń, Poland, 5–6.06.2009.
- (27) 12th Workshop: Non-Commutative Harmonic Analysis, Będlewo, Polska, 16–22.08.2009.
- (28) Satellite Conference of ICQBIC09, referat: *Introduction to quantisation of dissipative systems*, Suwa, Japan, 6–7.03.2009.

- (29) ICQBIC09 International Conference on Quantum BioInformatics, Tokyo University of Science, Noda, Japan, 11–14.03.2009.
- (30) Symmetry and Structural Properties of Condensed Matter, Myczkowce, Poland, 2–9.09.2009.
- (31) International Conference QBIC10, Tokyo University of Science, Noda, Japan, 10–13.03.2010.
- (32) 42nd Symposium on Mathematical Physics, Toruń, Poland, 19–22.06.2010.
- (33) 28th International Colloquium on Group-Theoretical Methods in Physics, Northumbria University, New Castle, Great Britain, 26–30.07.2010.
- (34) International Conference on Quantum Bio-Informatics, Tokyo University of Science, Noda, Japan, 7–14.03.2011.
- (35) 43rd Symposium on Mathematical Physics, Toruń, Poland, 20–22.06.2011.
- (36) XXX Workshop on Geometric Methods in Physics, Białowieża, Poland, 26.06–2.07.2011.
- (37) 44th Symposium on Mathematical Physics, Toruń, Poland, 20–24.06.2012.
- (38) XXIX International Colloquium on Group-Theoretical Methods in Physics, Chern Institute of Mathematics, Tianjin, China, 20–26.08.2012.

A handwritten signature in black ink, appearing to read "J. Jurek". The signature is written in a cursive, flowing style with some loops and flourishes.